



FACULTAD DE CIENCIAS

Resultados de separación para puntos de mínima energía en esferas

(Separation results for minimal energy points on spheres)

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER PARA ACCEDER AL
Máster en Matemáticas y Computación

PEDRO R. LÓPEZ GÓMEZ

DIRIGIDO POR CARLOS BELTRÁN ÁLVAREZ

SANTANDER, SEPTIEMBRE DE 2021

Agradecimientos

Antes de comenzar a hablar de matemáticas, me gustaría mencionar a algunas personas que han contribuido a que este trabajo llegase a buen puerto.

En primer lugar, me gustaría darle las gracias a Carlos Beltrán, no sólo por aceptar dirigir este trabajo y por toda la ayuda que me ha prestado durante la realización del mismo, sino también por la confianza que me ha transmitido en todo momento y por darme la oportunidad de seguir trabajando con él tras la finalización de este trabajo.

Asimismo, gracias al resto de componentes del grupo TEAMCO por la calurosa bienvenida que me habéis dado. Va a ser todo un placer trabajar con vosotros.

En este año de pandemia y mascarilla, quisiera agradecer a los profesores del máster y al resto de personal de la facultad el esfuerzo extra que ha permitido desarrollar las clases con la mayor normalidad posible.

Por último, gracias a mi familia, y, en particular, a mis padres, a mi hermana y a Celia, por su cariño, amor y comprensión.

RESUMEN. El problema de la distribución de puntos en esferas ha suscitado el interés de destacados científicos desde comienzos del siglo XX debido tanto a la belleza intrínseca del problema como a sus numerosas aplicaciones en matemáticas, física, química o biología. Entre las diferentes formas posibles de obtener una buena distribución de puntos, una de las que ha recibido mayor atención consiste en considerar los puntos que minimizan la energía de Riesz o s -energía. Podríamos plantearnos entonces la siguiente pregunta: dados N puntos que minimizan la s -energía en \mathbb{S}^d , ¿estarán dichos puntos bien separados? Este problema, que podría parecer sencillo, se encuentra resuelto sólo parcialmente. Con el objetivo de mejorar nuestra comprensión de esta cuestión, en este trabajo demostramos la buena separación de los puntos de mínima energía en tres de los casos conocidos: $s > 0$ y $s = \log$ en \mathbb{S}^1 , $s = \log$ en \mathbb{S}^2 y $d - 1 \leq s < d$ en \mathbb{S}^d , con $d \geq 2$.

PALABRAS CLAVE: distancia de separación, energía de Riesz, energía logarítmica, esferas.

ABSTRACT. The problem of distributing points on spheres has attracted the interest of notable scientists since the beginning of the twentieth century due both to the intrinsic beauty of the problem and to the large number of applications that it has in mathematics, physics, chemistry or biology. Among the different possible ways to obtain well-distributed points on spheres, perhaps the one that has received the most attention entails considering the points that minimise the Riesz energy, also known as s -energy. Thus, a natural question arises: given N points which minimise the s -energy on \mathbb{S}^d , will these points be well separated? This problem, which might seem deceptively simple, is only partially solved. In order to improve our understanding of this question, in this dissertation we prove that minimum energy points on spheres are well separated in three of the known cases: $s > 0$ and $s = \log$ in \mathbb{S}^1 , $s = \log$ in \mathbb{S}^2 and $d - 1 \leq s < d$ in \mathbb{S}^d , for $d \geq 2$.

KEYWORDS: separation distance, Riesz energy, logarithmic energy, spheres.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	7
1.1. Medidas e integración	7
1.2. Funciones semicontinuas	10
1.3. Funciones especiales	11
1.4. Nuestros espacios de trabajo	15
1.5. Energía discreta y energía continua	18
1.5.1. Energía discreta	18
1.5.2. Energía continua	19
1.5.3. Energía de Riesz en \mathbb{S}^d	20
2. Resultados de separación	23
2.1. Puntos bien separados en \mathbb{S}^1	23
2.2. Puntos bien separados en \mathbb{S}^2	28
2.3. Puntos bien separados en \mathbb{S}^d	32
A. La fórmula de la coárea	49
B. Justificación de algunas expresiones asintóticas	53
Referencias	57

Introducción

Es posible que el lector no conozca, o no tenga en la cabeza en el momento de leer estas líneas, cuál es la definición formal de que un conjunto de puntos esté bien distribuido. Sin embargo, no cabe duda de que todo ser humano, matemático o no, posee un conocimiento intuitivo de lo que significa que unos puntos estén bien distribuidos o bien separados en un cierto conjunto. Más tarde nos ocuparemos de formalizar estas nociones, pero, por el momento, fijémonos en las dos esferas de la figura 0.1. Mientras que los puntos de la esfera de la izquierda parecen estar muy bien distribuidos, difícilmente podríamos afirmar lo mismo en el caso de la esfera de la derecha.

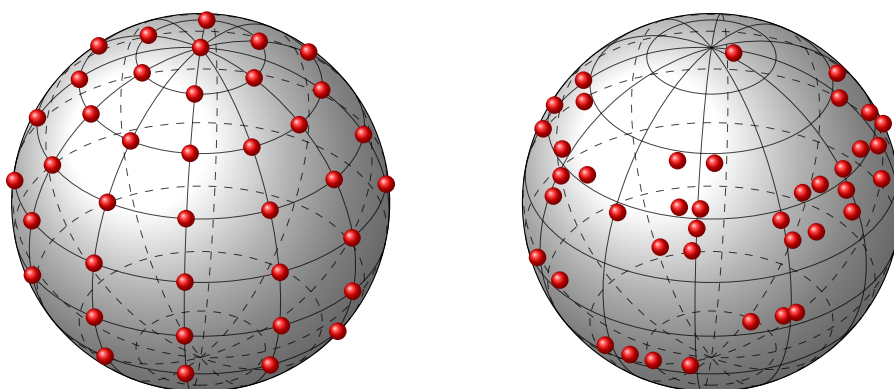


FIGURA 0.1. Dos distribuciones de puntos en la esfera.

La distribución de puntos en esferas y otros espacios es un universo fascinante, con múltiples ramificaciones y repleto de preguntas que aguardan respuesta. En las siguientes líneas intentaré resumir la historia de este bonito problema y trataré de mostrar su relación con el contenido de esta memoria.

El problema en la mitología clásica. En ocasiones, problemas aparentemente modernos hunden sus raíces en tiempos remotos. En sus *Metamorfosis*, Ovidio (8 d. C./2008) narra la historia de la ninfa Ío¹. El relato comienza cuando ésta, al regresar de un refrescante baño en el río, es avistada por Júpiter, quien al instante queda prendado de su belleza. Tras ver que

¹En el enlace <https://www.teamco.unican.es/portfolio-item/maths-and-myths-argos-panoptes/> está disponible un vídeo en el que se cuenta brevemente este mito y su relación con el problema de la distribución de puntos.

sus intentos de seducirla resultaban infructuosos, decide forzarla, ocultando la zona con una espesa niebla para evitar ser observado por su esposa Juno. Ésta, mientras tanto, observando desde lo alto la neblina que oscurecía tan extrañamente aquel luminoso día, y sospechando que pudiera ser parte de una treta de su promiscuo marido, decide descender a la tierra en un carro tirado por su animal predilecto, el pavo real, cuya cola no tenía aún los bonitos adornos en forma de círculos multicolor que luce en la actualidad.

Es entonces cuando Júpiter, para evitar ser descubierto, decide transformar a Ío en una hermosa ternera. Sin embargo, este truco no basta para engañar a Juno, quien, fingiendo alabar la belleza de aquel fabuloso animal, le pide a Júpiter que se lo regale como muestra de su amor. El dios, temiendo que una negativa ante una petición tan inocente pudiese delatarlo, accede y le entrega la vaca a Juno, quien decide ponerla bajo la vigilancia de Argos Panoptes, «el que todo lo ve», un gigante cuya cabeza estaba rodeada por cien ojos² que descansaban de dos en dos por turnos mientras los demás permanecían en guardia. En definitiva, un guardián perfecto.

Júpiter, incapaz de soportar el tormento sufrido por Ío, decide enviar a su hijo y mensajero Mercurio para que rescate a la ninfa de la atenta mirada de Argos. Haciéndose pasar por un mero pastor mientras toca una flauta hecha de cañas, Mercurio comienza a contarle al gigante una larga historia sobre el origen de este instrumento a la vez que le acaricia sus ojos con su caduceo mágico, consiguiendo así cerrar uno a uno todos los ojos del vigilante. Una vez que Argos está completamente dormido, Mercurio lo asesina y arroja su cabeza por la ladera de una montaña. Juno, devastada por la muerte de su querido guardián, recoge sus ojos y los coloca en la cola de su pájaro favorito, el pavo real, otorgándole así la vistosa apariencia que ostenta hoy en día.

Enfurecida, la diosa acosa a Ío, aún convertida en ternera, por todo el mundo, hasta que finalmente las súplicas de Júpiter consiguen aplacar la ira de Juno y la ninfa es devuelta a su forma humana.

Estamos seguros de que el lector, al leer este bonito cuento, se ha imaginado los ojos del siempre atento Argos Panoptes perfectamente distribuidos por la superficie de su cabeza y suficientemente separados unos de otros. De hecho, podemos pensar que, siendo como es un guardián perfecto, los ojos de Argos habrán de estar colocados de tal forma que se maximice el ángulo sólido cubierto por el campo de visión de los ojos tras cerrar aleatoriamente un número cualquiera de ellos.

Como vemos, el mito de Argos Panoptes puede considerarse como una versión primitiva del siguiente problema: ¿cómo colocar un cierto número de puntos en un conjunto dado de forma que maximicen o minimicen una cierta función?

Diferentes versiones de un mismo problema. Regresemos a tiempos más modernos. Desde comienzos del siglo XX, numerosos científicos han centrado su atención en la distribución de puntos en esferas, generando nuevas preguntas y problemas abiertos y dotando al problema de matices que no hacían sino enriquecerlo. Veremos en las siguientes líneas que cada uno de ellos tenía sus propias razones para preocuparse por estas cuestiones, lo que pone de manifiesto la íntima ligazón entre el problema que nos ocupa y los demás campos de la ciencia.

En 1904, en el Reino Unido, el físico británico J. J. Thomson, descubridor del electrón, propone el modelo atómico conocido popularmente como *modelo del pudín de pasas*, según el cual el átomo estaría formado por una especie de bola de carga positiva en cuyo interior

²Parece que no hay unanimidad en cuanto a la localización de los ojos de Argos. Ovidio afirma que estaban distribuidos por su cabeza, mientras que Apolodoro (ca. s. I-II a. C./1985), en su *Biblioteca*, dice que «tenía ojos por todo el cuerpo».

o en cuya superficie se encontrarían incrustados los electrones. Interesado en mejorar su comprensión de la estructura atómica, [Thomson \(1904\)](#) plantea el siguiente problema, conocido hoy como *problema de Thomson*: ¿cómo se distribuirían N electrones que se repeliesen mutuamente de acuerdo con la ley electrostática si estuviesen confinados en un lugar determinado, como una bola o una esfera? Si denotamos como $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ al conjunto de posiciones de N electrones en la esfera unidad \mathbb{S}^2 , tenemos que el problema de Thomson consiste en determinar las posiciones exactas de los electrones que minimizan la siguiente energía potencial:

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|}.$$

Este problema, importante no sólo en electrostática sino también, por ejemplo, en cristalografía o en el estudio de estructuras virales, se encuentra resuelto solamente para $2 \leq N \leq 6$ y $N = 12$; su resolución para todo valor de N es considerada por muchos una tarea imposible.

Otra versión del problema de distribuir puntos en esferas nos llega a través de los trabajos del botánico neerlandés [Tammes \(1930\)](#), quien estaba especialmente interesado en la reproducción de las plantas y, en particular, en la estructura de los granos de polen. Estos últimos, de forma aproximadamente esférica, presentan en su superficie una serie de agujeros por los que se expulsa el material genético de la planta (véase, por ejemplo, el libro de [Kesseler y Harley \(2011\)](#), donde se muestran algunas hermosas fotografías de estas partículas realizadas con microscopio electrónico). Lo que Tammes observó fue que estos agujeros se encontraban distribuidos por la superficie de los granos de polen de forma similar a como lo haría un número fijo de puntos colocados de modo que la distancia mínima entre ellos fuese lo más grande posible. En otras palabras, si consideramos una colección $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ de N puntos en la esfera \mathbb{S}^2 y definimos su *distancia de separación* como

$$\delta(\omega_N) := \min_{1 \leq i \neq j \leq N} \|x_i - x_j\|,$$

resulta que los agujeros presentes en las partículas de polen estudiadas por Tammes parecían maximizar esta cantidad. Es por ello que el problema de maximizar la distancia de separación de un conjunto de N partículas situadas en la esfera \mathbb{S}^2 se conoce hoy en día como *problema de Tammes*, el cual solamente ha sido resuelto en los casos $2 \leq N \leq 12$ y $N = 24$.

Volviendo a la física, a mediados del siglo XX el físico teórico estadounidense L. L. Whyte, intrigado por las posibles aplicaciones que la distribución de puntos en la esfera pudiera tener en la comprensión de la estructura del núcleo atómico, propuso ir más allá del problema de Thomson y considerar la optimización de otras funciones que hasta ese momento no habían recibido suficiente atención. En particular, [Whyte \(1952\)](#) planteó el siguiente problema, que podemos denominar *problema de Whyte*: encontrar colecciones $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ de N puntos en \mathbb{S}^2 de tal forma que el producto de las distancias mutuas sea máximo. Es decir, Whyte sugería estudiar los puntos que maximizan la siguiente función, conocidos como *puntos elípticos de Fekete*:

$$\prod_{i \neq j} \|x_i - x_j\|.$$

Se trata, nuevamente, de un problema abierto, salvo en los casos $2 \leq N \leq 6$ y $N = 12$. Un sencillo cálculo muestra que este problema es equivalente a minimizar la energía logarítmica:

$$E_{\log}(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|}.$$

De hecho, una versión computacional de este problema fue incluida por el medalla Fields Stephen Smale en su lista de *Problemas para el siglo XXI*. Si denotamos

$$\mathcal{E}_{\log}(\mathbb{S}^2, N) := \min_{\omega_N \subset \mathbb{S}^2} E_{\log}(\omega_N),$$

el problema 7 de Smale puede enunciarse como sigue:

Problema 7 de Smale (Smale, 1998). *Encontrar una colección ω_N de N puntos en \mathbb{S}^2 tales que*

$$E_{\log}(\omega_N) - \mathcal{E}_{\log}(\mathbb{S}^2, N) \leq c \log N, \quad c \text{ una constante universal.}$$

Aquí, *encontrar* quiere decir dar un algoritmo que en input N produzca como output N puntos en \mathbb{S}^2 que satisfagan la desigualdad anterior. Más concretamente, dicho algoritmo ha de ser una máquina BSS³ que requiera tiempo polinómico en N .

Este problema fue planteado originalmente por Shub y Smale (1993), quienes probaron que a partir de una colección de puntos que minimizan la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 es posible generar una sucesión de polinomios cuyos ceros están bien condicionados. Estos polinomios podrían ser utilizados entonces como puntos iniciales para los denominados *métodos de homotopía*, una serie de técnicas que permiten, entre otras cosas, resolver de forma aproximada sistemas de ecuaciones polinómicas (véanse, por ejemplo, [Beltrán y Pardo, 2011], [Bürgisser y Cucker, 2011] y [Lairez, 2017]). El lector que desee más información sobre el estado actual de la investigación en torno al problema 7 de Smale puede consultar el artículo recopilatorio de Beltrán (2020).

Todos los problemas mencionados hasta el momento pueden verse como casos particulares del siguiente problema generalizado, también conocido como *problema generalizado de Thomson*, que consiste en encontrar colecciones $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ de N puntos en la esfera \mathbb{S}^d de forma que minimicen la *energía de Riesz* o *s-energía*, dada por

$$(0.0.1) \quad E_s(\omega_n) = \begin{cases} \sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^{-s} & \text{si } s > 0, \\ \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|^{-1} & \text{si } s = \log. \end{cases}$$

En efecto, si consideramos el problema anterior en el caso $d = 2$, cuando $s = 1$ recuperamos el problema de Thomson; cuando $s \rightarrow \infty$, la única contribución relevante a la energía de Riesz será la de los *primeros vecinos*, por lo que, en ese caso, minimizar la s -energía equivale a maximizar la distancia de separación, que es, recordemos, el problema de Tammes; finalmente, cuando $s \rightarrow 0$, de la observación

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} r^{-s} = \log r^{-1}$$

se sigue que minimizar la energía de Riesz para valores cercanos a 0 equivale a minimizar la energía logarítmica, es decir, recuperamos el problema de Smale —o de Whyte—.

Distancia de separación en \mathbb{S}^d . Como hemos podido observar, la distancia entre los puntos de una determinada configuración subyace de forma notable tras los problemas abiertos más importantes en el ámbito de la distribución de puntos en esferas. Así, una pregunta que podríamos plantearnos es la siguiente: dados N puntos que minimizan la s -energía en \mathbb{S}^d , ¿estarán dichos puntos bien separados? En otras palabras, lo que nos gustaría saber es si los puntos que están bien distribuidos cuando elegimos como criterio que su energía de Riesz sea mínima están asimismo bien distribuidos cuando nos fijamos en su distancia de separación. Es posible que en este momento el lector se esté preguntando qué queremos decir cuando hablamos de puntos *bien separados*. De cara a formalizar un poco esta idea, hagamos una estimación rápida de cómo de separados podrían llegar a estar N puntos situados en la esfera

³Una máquina BSS es, *grosso modo*, un algoritmo en el que suponemos que las operaciones con números reales se realizan sin pérdida de precisión. Para más información sobre este modelo de computación, véase el libro de Blum, Cucker, Shub y Smale (1998).

\mathbb{S}^d . Llamemos δ a la distancia de separación de esta colección de puntos. Entonces, en torno a cada uno de ellos podríamos colocar un casquete esférico d -dimensional de radio $\delta/2$ de forma que no se intersequen. El volumen de cada uno de estos casquetes es, aproximadamente, de la forma $C\delta^d$ para una cierta constante $C > 0$, luego, dado que la suma de los volúmenes de los N casquetes no puede ser mayor que el volumen de la esfera \mathbb{S}^d , tendremos que

$$NC\delta^d \leq \text{vol}(\mathbb{S}^d),$$

de donde concluimos que

$$\delta \leq \frac{\tilde{C}}{N^{1/d}},$$

donde \tilde{C} es una constante que no depende de N . Es decir, dada una configuración ω_N de N puntos en \mathbb{S}^d , tenemos que $\delta(\omega_N) \in O(N^{-1/d})$. Es por esto que decimos que una familia $\{\omega_N\}_2^\infty$ de configuraciones de puntos en \mathbb{S}^d está *bien separada* si existe una constante $C = C(d) > 0$, independiente de N , tal que para todo $N \geq 2$ se cumple que

$$(0.0.2) \quad \delta(\omega_N) \geq CN^{-1/d},$$

esto es, si $\delta(\omega_N) \in \Omega(N^{-1/d})$.

Volviendo a la pregunta que nos hacíamos al principio del párrafo anterior, podría parecer obvio a la vista de la expresión (0.0.1) que si una colección de puntos minimiza la energía de Riesz entonces dichos puntos no podrán estar muy cerca unos de otros; es decir, estarán bien separados. No obstante, demostrarlo no es una tarea sencilla. Para $s < d$, por ejemplo, tenemos que solamente existen resultados de separación en el sentido de la desigualdad (0.0.2) en tres casos, que son esencialmente los que analizaremos en esta memoria: $s > 0$ y $s = \log$ en \mathbb{S}^1 , $s = \log$ en \mathbb{S}^2 y $d - 2 \leq s < d$ en \mathbb{S}^d , con $d \geq 2$; en este último caso nos limitaremos a estudiar lo que ocurre para $d - 1 \leq s < d$. En el caso $s \geq d$, conocido como *caso hipersingular*, disponemos también de resultados de separación para los puntos que minimizan la energía de Riesz (véase [Kuijlaars y Saff, 1998]). Sin embargo, las técnicas utilizadas en este caso difieren notablemente de las estudiadas en este trabajo, por lo que no lo consideraremos.

Disponer de puntos bien separados en esferas y otros conjuntos tiene numerosas aplicaciones prácticas; por ejemplo, es de gran utilidad en áreas como la evaluación numérica de integrales o el diseño de señales en telecomunicaciones. Aunque en este trabajo no nos centraremos en estas aplicaciones, el lector interesado en esta cuestión puede encontrar información al respecto en el libro de Conway y Sloane (1999, Ch. I, §1.4, y Ch. 3, §1.2).

Sobre esta memoria. La estructura de este texto es muy sencilla. Dedicaremos el capítulo 1 a establecer los requisitos necesarios para comprender los resultados principales del trabajo y sus demostraciones; parte de estos preliminares se suponen ya conocidos por cualquier estudiante de máster, mientras que otros quizá no han recibido tanta atención durante los estudios universitarios y, por tanto, los desarrollaremos con un poco más de detalle. A continuación, en el capítulo 2 probaremos los tres resultados de separación que constituyen el núcleo del trabajo. Comenzaremos probando, en la sección 2.1, que en \mathbb{S}^1 las únicas configuraciones que minimizan la energía de Riesz son las formadas por puntos equiespaciados y que los puntos de estas configuraciones están bien separados; así, el resultado principal de dicha sección es el siguiente:

Teorema 2.1.8. *Sea $f: (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa y decreciente definida en $t = 0$ por el valor (posiblemente infinito) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Sea ω_N^* una configuración de N puntos que minimiza la energía en \mathbb{S}^1 con respecto al núcleo $K(x, y) = f(\|x - y\|)$. Entonces,*

la configuración ω_N^* está formada por las raíces N -ésimas de la unidad rotadas una fase arbitraria y, por tanto, la distancia de separación verifica que

$$\delta(\omega_N^*) = 2 \sin \frac{\pi}{N} \geq \frac{4}{N}.$$

Las demostraciones de los resultados de la sección 2.1 requieren solamente de técnicas elementales, por lo que este caso no encierra gran dificultad. Veremos que ésta aumenta al considerar el caso de \mathbb{S}^2 , que trataremos en la sección 2.2. En dicha sección probaremos, utilizando la proyección estereográfica y algunas herramientas de variable compleja, que los puntos que minimizan la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 están bien separados:

Teorema 2.2.2. *Si ω_N^* , con $N \geq 2$, es una configuración que minimiza la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 , entonces la distancia de separación verifica que*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{19}{25} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Finalmente, el objetivo de la sección 2.3 será la prueba del siguiente teorema, que afirma que los puntos que minimizan la s -energía en \mathbb{S}^d , con $d \geq 2$ y $d - 1 \leq s < d$, están bien separados:

Teorema 2.3.1. *Si $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ y $d - 1 \leq s < d$, existe una constante $\lambda_{s,d} > 0$ tal que para todo $N \geq 2$ la distancia de separación de cualquier configuración ω_N^* que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d satisface que*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{\lambda_{s,d}}{N^{1/d}}.$$

Este salto en la dimensión conlleva, no obstante, un salto en la dificultad, en el sentido de que será necesario demostrar unos cuantos lemas previos y conocer algunos resultados de teoría del potencial antes de ser capaces de abordar con garantías la prueba del teorema anterior.

Cabe señalar que esta memoria no contiene, en general, resultados novedosos, pues mi tarea ha consistido, fundamentalmente, en recopilar y analizar los resultados presentes en la literatura, comprender sus demostraciones y completarlas con los detalles no explicitados en las fuentes consultadas. En ocasiones, sin embargo, estos detalles eran, de hecho, huecos bastante difíciles de llenar, como, por ejemplo, en el caso de la prueba del lema 2.3.7. Es preciso mencionar, además, que la prueba del teorema 2.2.2, que mejora un resultado conocido⁴, sí que contiene desarrollos originales. En lo que respecta a las fuentes bibliográficas, podemos considerar como referencia principal de este trabajo el libro de [Borodachov, Hardin y Saff \(2019\)](#), donde el lector interesado puede ampliar sus conocimientos sobre el problema de minimización de la energía y la distribución de puntos en esferas y otros conjuntos.

⁴Aún estamos lejos de la mejor cota conocida, debida a [Dragnev \(2002\)](#): $\delta(\omega_N^*) \geq 2/\sqrt{N-1}$. Para más detalles, véase la sección 2.2.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Con el objetivo de que este texto sea lo más autocontenido posible, dedicaremos las siguientes páginas a recordar algunos conceptos necesarios para comprender en su totalidad los desarrollos del capítulo siguiente. Las secciones 1.1–1.3 de este capítulo están dedicadas a repasar algunas definiciones y resultados que, si bien no son parte principal de este trabajo, aparecerán con cierta frecuencia y es conveniente tener presentes. Veremos en dichas secciones algunos conceptos básicos sobre medidas e integración, la definición de función semicontinua y todas las propiedades de las funciones especiales que aparecen en este texto. El lector que esté ya familiarizado con estas nociones puede saltar directamente a la sección 1.4, donde presentaremos los espacios con los que trabajaremos en esta memoria. Concluiremos este capítulo introduciendo, en la sección 1.5, la notación y terminología básicas sobre la energía de Riesz y el problema de minimización de la energía en \mathbb{S}^d .

1.1. Medidas e integración

En esta sección repasaremos algunas definiciones y resultados básicos sobre medidas e integración. No realizaremos un tratamiento exhaustivo de estas materias, pues no lo necesitaremos; el lector interesado en conocer más detalles sobre los temas expuestos aquí puede consultar, por ejemplo, el libro de Rudin (1987).

Definiciones básicas. Comenzaremos recordando la definición de σ -álgebra:

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una colección no vacía \mathcal{A} de subconjuntos de X es una σ -álgebra si verifica las siguientes condiciones:

- i) $X \in \mathcal{A}$.
- ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$, donde A^c es el complementario de A con respecto a X .
- iii) Si $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $A_i \in \mathcal{A}$ para todo $i = 1, 2, \dots$, entonces $A \in \mathcal{A}$.

Observación 1.1.2. A partir de la definición 1.1.1 se deducen automáticamente los siguientes hechos:

- i) Dado que $\emptyset = X^c$, por los apartados (i) y (ii) de la definición se tiene que $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- ii) Si en el apartado (iii) tomamos $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, tenemos que la unión finita de elementos de \mathcal{A} pertenece a \mathcal{A} .

III) Teniendo en cuenta que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c,$$

tenemos que la intersección —finita o numerable— de elementos de \mathcal{A} está en \mathcal{A} .

IV) Dado que $A \setminus B = B^c \cap A$, tenemos que $A \setminus B \in \mathcal{A}$ si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$.

A partir de las propiedades anteriores es fácil ver que la intersección de cualquier familia de σ -álgebras en X es una σ -álgebra en X . Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.3. Sea X un conjunto no vacío y sea \mathcal{F} una familia de subconjuntos de X . La σ -álgebra formada por la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{F} es la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{F} y se denomina σ -álgebra generada por \mathcal{F} .

En el caso concreto en que la σ -álgebra está generada por los abiertos de un espacio topológico, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.4. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Se llama σ -álgebra de Borel en X a la σ -álgebra generada por \mathcal{T} . Sus elementos se denominan *conjuntos de Borel* o *borelianos* de X .

Definición 1.1.5. Sea X un conjunto no vacío y sea \mathcal{A} una σ -álgebra en X . El par (X, \mathcal{A}) se denomina *espacio medible*. Los elementos de \mathcal{A} son los *conjuntos medibles* de X .

Definición 1.1.6. Una aplicación entre dos espacios medibles se dice *medible* si la preimagen de cualquier conjunto medible es medible; esto es, si (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) son espacios medibles, la aplicación $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ es medible si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Medidas positivas. Tras las definiciones anteriores, recordemos ahora la noción de medida positiva.

Definición 1.1.7. Sea \mathcal{A} una σ -álgebra. Una medida positiva definida en \mathcal{A} es una función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ que es contablemente aditiva; es decir, si $\{A_i\}$ es una colección contable de elementos de \mathcal{A} disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definición 1.1.8. Un *espacio de medida* es una terna (X, \mathcal{A}, μ) , donde X es un conjunto no vacío, \mathcal{A} es una σ -álgebra en X y μ es una medida en \mathcal{A} .

Definición 1.1.9. Una medida positiva μ en X se dice *finita* si $\mu(X) < \infty$ y σ -finita si X puede representarse como, a lo sumo, una unión contable de conjuntos de medida finita.

Definición 1.1.10. Una medida positiva en un espacio topológico X se dice *boreliana* si está definida en una σ -álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel.

Definición 1.1.11. El *soporte* de una medida boreliana μ en un espacio topológico X , denotado $\text{supp}(\mu)$, es el conjunto de los puntos tales que cualquier entorno abierto tiene medida positiva.

Definición 1.1.12. Sea μ una medida positiva definida en una σ -álgebra \mathcal{A} y sea $A \in \mathcal{A}$. Se dice que una propiedad P se verifica en μ -casi todo punto de A si se verifica en $A \setminus B$, donde B es un conjunto de medida cero.

Definición 1.1.13. Una medida positiva μ definida en una σ -álgebra \mathcal{A} se dice *completa* si todo subconjunto de un conjunto de medida cero es medible.

Definición 1.1.14. Dado un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , se dice que μ es una *medida de probabilidad* si $\mu(X) = 1$.

Ejemplo 1.1.15. Los siguientes son ejemplos básicos de medidas positivas:

- i) Dado un conjunto X y una σ -álgebra \mathcal{A} en X , la *medida de Dirac* δ_x concentrada en un punto $x \in X$ se define, para cada $A \in \mathcal{A}$, como

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- ii) Dado un conjunto X y una σ -álgebra \mathcal{A} en X , la *medida de conteo* ν_B de un conjunto $B \subset X$ es la medida que asigna a cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ el número de elementos de $B \cap A$; es decir,

$$\nu_B(A) := \#(B \cap A).$$

Si B es no vacío y tiene un número finito de elementos, la medida de probabilidad $\frac{1}{\#(B)}\nu_B$ se denomina *medida de conteo normalizada* de B . Esta medida se puede expresar también en términos de las medidas de Dirac: si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces

$$\frac{1}{\#(B)}\nu_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}.$$

- iii) En el espacio euclídeo \mathbb{R}^p podemos considerar la σ -álgebra de Lebesgue \mathcal{L}_p , que contiene a los conjuntos de Borel y cuyos elementos se denominan conjuntos medibles Lebesgue o simplemente medibles si no existe ambigüedad. La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^p , definida sobre la σ -álgebra \mathcal{L}_p , es la medida natural en \mathbb{R}^p , en el sentido de que la medida de un rectángulo p -dimensional es su volumen. Esta medida, que denotaremos μ_p o simplemente μ cuando la dimensión esté clara por el contexto, es una medida positiva completa, σ -finita e invariante por rotaciones y traslaciones.

Medidas producto. Dados dos espacios de medida $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, donde μ_1 y μ_2 son medidas positivas σ -finitas, es posible definir un nuevo espacio de medida a partir del producto de los dos primeros. Para ello, denotemos mediante \mathcal{A} la σ -álgebra en $X_1 \times X_2$ generada por la familia de todos los subconjuntos de la forma $A_1 \times A_2$, donde $A_1 \in \mathcal{A}_1$ y $A_2 \in \mathcal{A}_2$. La *medida producto* $\mu_1 \times \mu_2$ es la única medida definida en \mathcal{A} tal que

$$\mu_1 \times \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2).$$

La prueba de la existencia y unicidad de esta medida producto escapa a los objetivos de este trabajo; baste decir que la existencia está garantizada por el teorema de Hahn–Kolmogorov, también conocido como teorema de extensión de Carathéodory, mientras que la unicidad se debe a que tanto μ_1 como μ_2 son medidas σ -finitas.

Integración. Como sabemos, dado un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) es posible construir la integral de Lebesgue de una función medible sobre un conjunto $E \in \mathcal{A}$ con respecto a la medida μ siguiendo una serie de pasos. No trataremos aquí dicha construcción, pues no necesitaremos entrar en tanto detalle; el lector interesado puede consultarla, por ejemplo,

en el libro de [Stein y Shakarchi \(2005\)](#). Diremos que una función medible $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es *integrable* con respecto a la medida μ si $\int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty$, y denotaremos mediante $L_\mu(X)$ al espacio de las funciones integrables en X con respecto a la medida μ . Asimismo, cabe señalar que a lo largo de este documento utilizaremos indistintamente las siguientes notaciones para referirnos a la integral de una función f sobre un conjunto medible E con respecto a una medida μ :

$$\int_E f(x) d\mu(x), \quad \int_{x \in E} f(x) d\mu(x), \quad \int_E f(x) dx, \quad \int_{x \in E} f(x) dx,$$

donde, en los dos últimos casos, la medida con respecto a la cual estamos integrando quedará clara por el contexto.

El siguiente resultado afirma que podemos obtener una nueva medida a partir de otra dada asignando una densidad a cada punto del espacio e integrando sobre un subconjunto medible, es decir:

Proposición 1.1.16 ([Borodachov, Hardin y Saff, 2019, Prop. 1.4.4](#)). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y sea $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ una función μ -medible. Entonces, la función $\nu_f: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ definida como*

$$\nu_f(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$$

es también una medida. La función f se denomina densidad de la medida ν_f con respecto a μ .

Concluimos esta sección enunciando un conocido teorema que nos será muy útil a la hora de calcular integrales sobre el producto de dos espacios:

Teorema 1.1.17 (Teorema de Fubini). *Sea $f \in L_{\mu_1 \times \mu_2}(X_1 \times X_2)$, donde μ_i es una medida σ -finita en X_i , con $i = 1, 2$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x, y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y), \end{aligned}$$

y todas las integrales están bien definidas.

En general, prescindiremos de los paréntesis. Asimismo, en ocasiones abusaremos ligeramente de la notación y denotaremos la integral sobre el producto como

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

1.2. Funciones semicontinuas

Aunque la definición de semicontinuidad puede darse para espacios topológicos en general, aquí nos centraremos en el caso de espacios métricos compactos. Seguiremos la sección 1.5 del libro de [Borodachov, Hardin y Saff \(2019\)](#).

Definición 1.2.1. Sea A un espacio métrico compacto y $f: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función real extendida. Decimos que f es *semicontinua inferiormente* en un punto $x_0 \in A$ si

$$(1.2.1) \quad f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

La función f se dice semicontinua inferiormente en A si es semicontinua inferiormente en todo punto de A . Análogamente, se dice que f es *semicontinua superiormente* en un punto $x_0 \in A$ si

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

y se dice semicontinua superiormente en A si es semicontinua superiormente en todo punto de A .

Es fácil ver a partir de esta definición que una función es continua si y sólo si es semicontinua superior e inferiormente. A continuación probaremos una versión del conocido teorema de los valores extremos o teorema de Weierstrass para el caso de funciones semicontinuas inferiormente, para lo cual necesitaremos el siguiente resultado previo:

Lema 1.2.2. Sea A un espacio métrico y sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m := \inf_{x \in A} f(x) > -\infty$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $f(x_n) \rightarrow m$. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se denomina sucesión minimizante.

Teorema 1.2.3. Una función semicontinua inferiormente en un espacio métrico compacto A es acotada inferiormente y alcanza su ínfimo en algún punto de A .

Demostración. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente. Veamos en primer lugar que es acotada inferiormente. Por reducción al absurdo, supongamos que no lo es. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá un $x_n \in A$ tal que

$$f(x_n) < -n.$$

Dado que A es compacto, la sucesión $\{x_n\}$ posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto $x_0 \in A$. Como f es semicontinua inferiormente, tenemos que

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = -\infty,$$

lo cual es absurdo. Por tanto, f es acotada inferiormente. Veamos ahora que alcanza el ínfimo. Sea $m := \inf\{f(x) : x \in A\}$; por el lema 1.2.2 sabemos que existe una sucesión minimizante $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $f(x_n) \rightarrow m$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dado que A es compacto, la sucesión anterior contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $a \in A$. Entonces, por (1.2.1) tenemos que

$$f(a) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = m.$$

Por otro lado, dado que, por definición, tenemos que $m \leq f(a)$, se obtiene $f(a) = m$, con lo que el ínfimo se alcanza en un punto de A . \square

1.3. Funciones especiales

A lo largo de esta memoria aparecerán con cierta frecuencia algunas funciones especiales, como las funciones gamma y beta o la función hipergeométrica de Gauss, por lo que dedicaremos esta sección a recordar la definición de estas funciones y recopilar algunas de sus principales propiedades. En esta sección hemos seguido como referencia el libro de [Temme \(1996\)](#).

Comencemos recordando la definición de la función gamma:

Definición 1.3.1. La función gamma se define como

$$(1.3.1) \quad \Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Si integramos por partes en (1.3.1), obtenemos una útil relación funcional:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

Dado que $\Gamma(1) = 1$, la relación anterior muestra que la función gamma es una generalización del factorial, pues $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

La función $\Gamma(z)$ puede extenderse por continuación analítica a todos los números complejos excepto los enteros no positivos, en los cuales dicha continuación analítica tiene polos simples; esta extensión meromorfa se denota asimismo mediante $\Gamma(z)$. A continuación presentamos dos útiles propiedades de esta función:

Proposición 1.3.2. La función gamma verifica la siguiente propiedad, conocida como fórmula de reflexión:

$$(1.3.2) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

A partir de la expresión (1.3.2) se tiene, por ejemplo, que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Proposición 1.3.3. La función gamma verifica la siguiente propiedad, conocida como fórmula de duplicación de Legendre:

$$(1.3.3) \quad \Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{k}{2} : k \in \mathbb{Z}, k \leq 0 \right\}.$$

Otra función especial estrechamente relacionada con la función gamma es la función beta, cuya definición recordamos a continuación.

Definición 1.3.4. La función beta se define como

$$(1.3.4) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = 2 \int_0^1 t^{2x-1} (1-t^2)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Es claro a partir de la definición anterior que la función beta es simétrica, es decir, $B(x, y) = B(y, x)$. Además, puede evaluarse en términos de la función gamma:

$$(1.3.5) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

La función hipergeométrica. Para finalizar esta sección introduciremos la función hipergeométrica. En su versión más general, la función hipergeométrica se define como sigue:

Definición 1.3.5. La función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ se define como

$$(1.3.6) \quad {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

donde $(a)_n$ es el *símbolo de Pochhammer* o *factorial ascendente*, definido por $(a)_0 = 1$ y $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ si $n > 0$. Es decir,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n \geq 0.$$

Notemos que la fórmula que involucra a la función gamma no está definida para enteros no positivos, pero el producto finito siempre lo está.

En este trabajo, no obstante, utilizaremos solamente la denominada *función hipergeométrica de Gauss*:

$$(1.3.7) \quad {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots, \quad |z| < 1.$$

Además, supondremos que $a, b, c \in \mathbb{R}$. A partir de la serie (1.3.7) puede calcularse fácilmente la derivada de ${}_2F_1(a, b; c; z)$ sin más que derivar término a término:

$$(1.3.8) \quad \frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z).$$

Veamos algunas propiedades de la función hipergeométrica. En primer lugar, comprobemos que, en efecto, el radio de convergencia de la serie (1.3.7) es 1.

Proposición 1.3.6. *La serie (1.3.7) tiene radio de convergencia 1.*

Demostración. Recordemos que, dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, su radio de convergencia ρ puede calcularse como

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right|,$$

siempre y cuando exista dicho límite. Teniendo en cuenta que $(a)_{n+1}/(a)_n = a+n$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}(c)_n n!}{(a)_n(b)_n(c)_{n+1}(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 + n(a+b) + ab}{n^2 + n(c+1) + c} \right| = 1, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Por la proposición anterior tenemos que la serie (1.3.7) converge si $|z| < 1$ y diverge fuera del disco $|z| \leq 1$. En este último caso, podemos considerar la continuación analítica dada por la siguiente fórmula, conocida como *representación integral de Euler de la función hipergeométrica*:

$$(1.3.9) \quad {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt,$$

con $c > b > 0$ y $z \notin [1, \infty)$. La prueba de este resultado puede encontrarse en la sección 5.2 del libro de Temme (1996). Para analizar lo que ocurre en el caso $z = 1$ necesitaremos el siguiente teorema, debido a Abel:

Teorema 1.3.7 (Ahlfors, 1979, §2.5). Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con coeficientes reales a_n y con radio de convergencia 1. Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = g(1)$ converge. Entonces, $g(x)$ es continua por la izquierda en $x = 1$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1).$$

Proposición 1.3.8. Si $c - a - b > 0$, entonces la serie (1.3.7) converge en $z = 1$ y

$$(1.3.10) \quad {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Si $c - a - b < 0$, entonces la serie (1.3.7) diverge en $z = 1$.

Demostración. Probaremos que la serie (1.3.7) es absolutamente convergente en $z = 1$, es decir, queremos probar que la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

Dado que se trata de una serie de términos positivos, podemos aplicar los criterios de convergencia correspondientes a este tipo de series. En concreto, aplicaremos el criterio de Raabe–Duhamel, que afirma que si $\sum_n \alpha_n$ es una serie de términos positivos y $r = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \alpha_{n+1}/\alpha_n)$, entonces la serie es convergente si $r > 1$ y divergente si $r < 1$; si $r = 1$, o si el límite no existe, este criterio no aporta información. En la demostración de la proposición 1.3.6 ya vimos que

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left| \frac{n^2 + n(a+b) + ab}{n^2 + n(c+1) + c} \right|.$$

Además, existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + n(a+b) + ab, n^2 + n(c+1) + c > 0$ para todo $n \geq N$, luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{n^2 + n(a+b) + ab}{n^2 + n(c+1) + c} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n^2 + n(c+1) + c - n^2 - n(a+b) - ab}{n^2 + n(c+1) + c} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(c-a-b+1) + n(c-ab)}{n^2 + n(c+1) + c} = c - a - b + 1, \end{aligned}$$

con lo que, por el criterio de Raabe–Duhamel, la serie converge en $z = 1$ si $c - a - b > 0$ y diverge si $c - a - b < 0$. Calculemos entonces su valor en $z = 1$, suponiendo que $c - a - b > 0$. Por el teorema 1.3.7 tenemos que ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es continua por la izquierda en $z = 1$, luego, teniendo en cuenta la representación integral (1.3.9), tenemos que

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; 1) &= \lim_{z \rightarrow 1^-} {}_2F_1(a, b; c; z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-a-b-1} dt = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} B(b, c-a-b) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned}$$

como buscábamos. □

Corolario 1.3.9. Si $c - a - b > 0$ y $z \in \mathbb{R}$, la función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es continua por la izquierda en $z = 1$, es decir,

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} {}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Es claro a partir de la prueba de la proposición 1.3.8 que la serie (1.3.7) no converge en $z = 1$ si $c - a - b < 0$; sin embargo, aún podemos decir algo cuando nos acercamos a dicho punto, aunque antes necesitamos el siguiente lema:

Lema 1.3.10. Si $c > b > 0$ y $z \notin [1, \infty)$, se verifica la siguiente relación:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z).$$

Demostración. En primer lugar, si consideramos el cambio de variable $t = 1 - s$ en la integral (1.3.9), tenemos que

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} (1-z+sz)^{-a} ds \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{(1-z)^a} \int_0^1 s^{c-b-1} (1-s)^{b-1} \left(1 - \frac{sz}{z-1}\right)^{-a} ds \\ &= (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right), \end{aligned}$$

pues $z \notin [1, \infty)$ implica que $z/(z-1) \notin [1, \infty)$. Utilizando la relación anterior y teniendo en cuenta que la función hipergeométrica es simétrica en sus dos primeros argumentos, obtenemos que

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(c-b, a; c; \frac{z}{z-1}\right) \\ &= (1-z)^{-a} (1-z)^{c-b} {}_2F_1(c-b, c-a; c; z) \\ &= (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z), \end{aligned}$$

como buscábamos. □

Proposición 1.3.11. Si $c > b > 0$, $c - a - b < 0$ y $z \in \mathbb{R}$, entonces

$$(1.3.11) \quad \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{(1-z)^{c-a-b}} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Demostración. Basta tener en cuenta el lema 1.3.10 y el corolario 1.3.9:

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{(1-z)^{c-a-b}} = \lim_{z \rightarrow 1^-} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad \square$$

1.4. Nuestros espacios de trabajo

A lo largo de esta memoria trabajaremos fundamentalmente con dos tipos de conjuntos o espacios. Por un lado, tendremos *colecciones* o *configuraciones* de N puntos, con $N \geq 2$, que denotaremos $\omega_N := \{x_1, \dots, x_N\}$ y en las que permitiremos que haya puntos repetidos; estas configuraciones estarán típicamente contenidas en esferas. A estas configuraciones de

puntos las dotaremos de la medida de conteo, que denotaremos ν_{ω_N} y que consideraremos normalizada con el fin de que $\nu_{\omega_N}(\omega_N) = 1$. Recordemos que esta medida se define como

$$(1.4.1) \quad \nu_{\omega_N} := \frac{1}{N} \sum_{x \in \omega_N} \delta_x,$$

donde δ_x es la medida de Dirac concentrada en el punto x .

Por otro lado, trabajaremos, naturalmente, con esferas; recordemos que la esfera unidad de dimensión d se define como

$$\mathbb{S}^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}, \quad d \in \mathbb{N},$$

donde $\|\cdot\|$ es la distancia euclídea usual. Dotaremos a \mathbb{S}^d de la medida de Lebesgue, que denotaremos μ cuando no esté normalizada y $\mu_{\mathbb{S}^d}$ cuando la normalizamos de modo que $\mu_{\mathbb{S}^d}(\mathbb{S}^d) = 1$. El siguiente resultado muestra una relación entre la esfera de dimensión d y la esfera de dimensión $d-1$ y, bajo ciertas condiciones, permite reducir el cálculo de una integral sobre \mathbb{S}^d a una integral simple.

Lema 1.4.1. *Sea $v \in \mathbb{S}^d$ y sea $f: \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(u) = g(\langle u, v \rangle)$ para alguna función integrable $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, f es integrable y*

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(u) d\mu = \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 g(t) (1-t^2)^{d/2-1} dt.$$

Demostración. Consideremos el difeomorfismo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{S}^{d-1} \times (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ (p, t) &\longmapsto (p\sqrt{1-t^2}, t). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula (A.0.4) tendremos que

$$(1.4.2) \quad \int_{u \in \mathbb{S}^d} f(u) du = \int_{(p,t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times (-1,1)} (f \circ \varphi)(p, t) \text{NJac}_{(p,t)} \varphi d(p, t).$$

La condición de que $f(u) = g(\langle u, v \rangle)$ para algún $v \in \mathbb{S}^d$ quiere decir que f depende solamente de una coordenada, de modo que, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $v = e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$. Así, si denotamos $u = (u_1, \dots, u_{d+1})$, tendremos que $f(u) = g(u_{d+1})$. Por tanto,

$$(f \circ \varphi)(p, t) = f(p\sqrt{1-t^2}, t) = g(t).$$

Llevando esto a la expresión (1.4.2), obtenemos que

$$(1.4.3) \quad \begin{aligned} \int_{u \in \mathbb{S}^d} f(u) du &= \int_{(p,t) \in \mathbb{S}^{d-1} \times (-1,1)} g(t) \text{NJac}_{(p,t)} \varphi d(p, t) \\ &= \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 g(t) \text{NJac}_{(p,t)} \varphi dt, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini e integrado la parte correspondiente a \mathbb{S}^d , ya que la función sólo depende de t . Por tanto, basta probar que $\text{NJac}_{(p,t)} \varphi = (1-t^2)^{d/2-1}$. Consideremos entonces la aplicación diferencial $D_{(p,t)} \varphi: T_{(p,t)}(\mathbb{S}^{d-1} \times (-1, 1)) \rightarrow T_{\varphi(p,t)} \mathbb{S}^d$, y sea $\{v_1, \dots, v_d\}$ la base ortonormal de $T_{(p,t)}(\mathbb{S}^{d-1} \times (-1, 1))$ formada por $\{v_i\}_{i=1}^{d-1} = \{\dot{p}_i, 0\}_{i=1}^{d-1}$ y $v_d = e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$, donde

$$\|\dot{p}_i\| = 1, \quad \langle \dot{p}_i, p \rangle = 0, \quad \langle \dot{p}_i, \dot{p}_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, d-1, \quad i \neq j.$$

Calculemos la imagen de los elementos de esta base por la aplicación diferencial:

$$\begin{aligned} D_{(p,t)}\varphi(\dot{p}_i, 0) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi((p, t) + s(\dot{p}_i, 0)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(p + s\dot{p}_i, t) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left((p + s\dot{p}_i)\sqrt{1-t^2}, t \right) = \left(\dot{p}_i\sqrt{1-t^2}, 0 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{(p,t)}\varphi(e_{d+1}) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi((p, t) + te_{d+1}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{t=0} \varphi(p, t+s) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(p\sqrt{1-(t+s)^2}, t+s \right) = \left(-p \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1 \right). \end{aligned}$$

Dado que cada uno de los \dot{p}_i es ortogonal a p , tenemos que la imagen de la base ortonormal de la que partíamos es una base ortogonal, con lo que el volumen del paralelepípedo que definen es simplemente el producto de sus normas. Por tanto, el jacobiano normal de φ en el punto (p, t) vendrá dado por

$$\text{NJac}_{(p,t)}\varphi = \left\| \left(-p \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1 \right) \right\| \prod_{i=1}^{d-1} \|\dot{p}_i\| \sqrt{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \prod_{i=1}^{d-1} \sqrt{1-t^2} = (1-t^2)^{d/2-1}.$$

Por tanto, concluimos que

$$\int_{u \in \mathbb{S}^d} f(u) du = \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 g(t) (1-t^2)^{d/2-1} dt,$$

como queríamos probar. \square

A partir del lema anterior es posible calcular, por ejemplo, el volumen de la esfera unidad de dimensión d :

Corolario 1.4.2. *El volumen de la esfera unidad de dimensión d es*

$$\text{vol}(\mathbb{S}^d) = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}.$$

Demostración. Probémoslo por inducción en d . En el caso $d = 1$ tenemos que

$$\text{vol}(\mathbb{S}^1) = 2\pi = \frac{2\pi^{(1+1)/2}}{\Gamma(\frac{1+1}{2})},$$

luego la fórmula se verifica. Supongamos entonces que es cierta para $d-1$ y probémoslo para d . Por el lema 1.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{S}^d) &= \int_{\mathbb{S}^d} du = \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{d/2-1} dt = \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{d}{2}\right) \\ &\stackrel{\text{hip. ind.}}{=} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

1.5. Energía discreta y energía continua

En esta sección introducimos la notación y terminología básicas que utilizaremos en el capítulo siguiente y veremos algunos resultados de teoría del potencial que nos serán útiles más adelante.

1.5.1. Energía discreta. Comenzaremos introduciendo la terminología asociada al problema de minimización de la energía discreta. Aunque todo lo que presentamos a continuación puede ser aplicado a un espacio métrico en general, nosotros nos limitaremos al caso de la esfera \mathbb{S}^d con la distancia euclídea $\|\cdot\|$. Seguiremos fundamentalmente las secciones 2.1 y 2.2 del libro de [Borodachov, Hardin y Saff \(2019\)](#).

En primer lugar, llamaremos *núcleo* a una aplicación $K: \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Así, la K -energía de una configuración ω_N de N puntos en \mathbb{S}^d se define como

$$E_K(\omega_N) := \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N K(x_i, x_j) = \sum_{i \neq j} K(x_i, x_j).$$

Asimismo, se define la K -energía *minimal discreta* de N puntos de \mathbb{S}^d como

$$\mathcal{E}_K(\mathbb{S}^d, N) := \inf\{E_K(\omega_N) : \omega_N \subset \mathbb{S}^d\}.$$

Dado que \mathbb{S}^d es un espacio compacto y K será, típicamente, una aplicación semicontinua inferiormente, tendremos que E_K será semicontinua inferiormente en el espacio compacto $(\mathbb{S}^d)^N$, de modo que, por el teorema 1.2.3, existirá una configuración de N puntos $\omega_N^* \subset \mathbb{S}^d$ tal que $E_K(\omega_N^*) = \mathcal{E}_K(\mathbb{S}^d, N)$. Diremos entonces que ω_N^* es una *configuración minimizante* u *óptima* para la K -energía en \mathbb{S}^d .

En este trabajo trataremos principalmente con dos núcleos, que definimos a continuación.

Definición 1.5.1. Se define el s -núcleo de Riesz en $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$ como

$$K_s(x, y) := \frac{1}{\|x - y\|^s}, \quad s > 0, \quad x, y \in \mathbb{S}^d.$$

Utilizaremos la notación

$$E_s(\omega_N) := E_{K_s}(\omega_N), \quad s > 0,$$

para denotar la s -energía de Riesz discreta de una configuración $\omega_N \subset \mathbb{S}^d$, y

$$\mathcal{E}_s(\mathbb{S}^d, N) := \mathcal{E}_{K_s}(\mathbb{S}^d, N), \quad s > 0,$$

para denotar la s -energía de Riesz discreta *minimal* de N puntos de \mathbb{S}^d . Las configuraciones minimizantes ω_N^* se denominarán *configuraciones minimizantes de la s -energía*.

Cuando $s \rightarrow 0$, como mencionamos en la introducción del trabajo, la observación de que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} r^{-s} = \log r^{-1}$$

sugiere la siguiente definición:

Definición 1.5.2. Se define el *núcleo logarítmico* en $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$ como

$$K_{\log}(x, y) := \log \frac{1}{\|x - y\|}, \quad x, y \in \mathbb{S}^d.$$

Las *energías logarítmicas* asociadas se denotarán mediante

$$E_{\log}(\omega_N) := E_{K_{\log}}(\omega_N), \quad \mathcal{E}_{\log}(\mathbb{S}^d, N) := \mathcal{E}_{K_{\log}}(\mathbb{S}^d, N),$$

y nos referiremos a este caso como el caso $s = \log$ de la energía de Riesz.

1.5.2. Energía continua. Aunque en la subsección anterior hemos hablado de la energía desde una perspectiva discreta, es posible hablar de ella también desde un punto de vista continuo (Borodachov, Hardin y Saff, 2019, §4.1). Así, si denotamos como $\mathcal{M}(\mathbb{S}^d)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad borelianas con soporte en \mathbb{S}^d y consideramos un núcleo $K: \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, podemos definir el *potencial* de una medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^d)$ con respecto al núcleo K como

$$(1.5.1) \quad U_K^\mu(x) := \int_{\mathbb{S}^d} K(x, y) d\mu(y), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

y la *energía continua* de una medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^d)$ con respecto al núcleo K como

$$V_K^\mu := \int_{\mathbb{S}^d} U_K^\mu(x) d\mu(x) = \iint_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} K(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

En ocasiones utilizaremos también los términos K -potencial de μ o K -energía de μ . La menor de estas energías se conoce como *constante de Wiener*:

$$W_K(\mathbb{S}^d) := \inf\{V_K^\mu : \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^d)\}.$$

Al igual que en el caso de la energía discreta, cuando K sea el núcleo de Riesz K_s utilizaremos las siguientes notaciones:

$$U_s^\mu := U_{K_s}^\mu, \quad V_s^\mu := V_{K_s}^\mu, \quad W_s(\mathbb{S}^d) := W_{K_s}(\mathbb{S}^d).$$

Utilizando técnicas de teoría del potencial es posible demostrar que la medida que proporciona la menor energía continua en la esfera en el caso del núcleo de Riesz es, precisamente, la medida de Lebesgue normalizada $\mu_{\mathbb{S}^d}$ (Borodachov, Hardin y Saff, 2019, §4.6), esto es,

$$W_s(\mathbb{S}^d) = V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}.$$

Notemos que podemos definir también el potencial asociado a la medida de conteo ν_{ω_N} definida en (1.4.1), en cuyo caso la integral en (1.5.1) se reduce a una suma finita:

$$(1.5.2) \quad U_K^{\nu_{\omega_N}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \omega_N} K(x, y), \quad x \in \mathbb{S}^d.$$

Cabe señalar que en el caso de que K sea el núcleo de Riesz o el núcleo logarítmico, tanto el propio núcleo como el potencial $U_K^\mu(x)$ pueden definirse en todo el espacio \mathbb{R}^{d+1} .

Una importante propiedad de los potenciales asociados a núcleos semicontinuos inferiormente es que ellos mismos son semicontinuos inferiormente. Para probarlo necesitamos recordar el lema de Fatou:

Lema 1.5.3 (Lema de Fatou). *Sea μ una medida positiva en un espacio métrico X . Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones medibles no negativas en X , entonces la función $f(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in X$, es también medible y*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) \geq \int_X f(x) d\mu(x).$$

Proposición 1.5.4. *Sea $K: \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un núcleo simétrico y semicontinuo inferiormente. Entonces, el potencial $U_K^\mu(x)$ de cualquier medida de probabilidad boreliana μ en \mathbb{S}^d es una función semicontinua inferiormente en \mathbb{S}^d .*

Demostración. Fijemos un punto $x \in \mathbb{S}^d$ y consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{S}^d$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dado que el núcleo K es una función semicontinua inferiormente en un conjunto compacto, es acotado inferiormente, como probamos en el teorema 1.2.3. Sea entonces $c \in \mathbb{R}$ una cota inferior de K en $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$, y consideremos el núcleo $K - c$. Por un lado, tenemos que

$$U_{K-c}^\mu(x) = \int_{\mathbb{S}^d} (K(x, y) - c) d\mu(y) = U_K^\mu(x) - c \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(y).$$

Por otro lado, dado que $\{K(x_n, y) - c\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, aplicando el lema 1.5.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} (K(x, y) - c) d\mu(y) &= \int_{\mathbb{S}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} (K(x_n, y) - c) d\mu(y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^d} (K(x_n, y) - c) d\mu(y) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^d} K(x_n, y) d\mu(y) - c \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(y) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} U_K^\mu(x_n) - c \int_{\mathbb{S}^d} d\mu(y), \end{aligned}$$

de donde

$$U_K^\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} U_K^\mu(x_n),$$

con lo que $U_K^\mu(x)$ es una función semicontinua inferiormente. \square

1.5.3. Energía de Riesz en \mathbb{S}^d . Una vez que hemos fijado los términos del problema de minimización de la energía, en esta subsección calcularemos el potencial y la energía de Riesz de la medida $\mu_{\mathbb{S}^d}$, que, como ya hemos mencionado, es la que proporciona la menor energía continua en \mathbb{S}^d . Para ello, seguiremos lo realizado en el apéndice A.11 del libro de [Borodachov, Hardin y Saff \(2019\)](#).

Nuestro objetivo es, por tanto, calcular la siguiente integral:

$$(1.5.3) \quad V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = \iint_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|x - y\|^s} d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) d\mu_{\mathbb{S}^d}(y).$$

Dicho cálculo solamente tiene sentido si $s < d$, pues, en caso contrario, la integral anterior vale ∞ . Así pues, consideremos en primer lugar un núcleo de la forma $K_f(x, y) = f(\|x - y\|^2)$; la energía asociada a dicho núcleo será

$$(1.5.4) \quad V_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = \iint_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} f(\|x - y\|^2) d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) d\mu_{\mathbb{S}^d}(y).$$

Proposición 1.5.5. *Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que la integral (1.5.4) es finita. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ con $\|x\| = R > 0$, se verifica que*

$$U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = 2^{d-1} \cdot \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 f((R+1)^2 - 4Ru) u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du.$$

Demostración. En primer lugar, notemos que

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = 1 + R^2 - 2R \left\langle \frac{x}{R}, y \right\rangle.$$

Entonces, por el lema 1.4.1 —teniendo en cuenta que en este caso la medida está normalizada— tenemos que

$$U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(\|x - y\|^2) d\mu_{\mathbb{S}^d}(y) = \int_{\mathbb{S}^d} f\left(R^2 + 1 - 2R \left\langle \frac{x}{R}, y \right\rangle\right) d\mu_{\mathbb{S}^d}(y)$$

$$= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_{-1}^1 f(R^2 + 1 - 2Rt)(1 - t^2)^{d/2-1} dt.$$

Si hacemos el cambio de variable $2u = 1 + t$ en esta última integral, podemos concluir que

$$\begin{aligned} U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 f(R^2 + 1 - 2R(2u - 1)) (-4u^2 + 4u)^{d/2-1} \cdot 2 du \\ &= 2^{d-1} \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 f((R+1)^2 - 4Ru) u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du, \end{aligned}$$

como buscábamos. \square

Proposición 1.5.6. Sea $f: (0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que la integral (1.5.4) es finita. Entonces,

$$V_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = \frac{2^{d-1} \Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 f(4u) u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du.$$

Demostración. Fijemos un $x \in \mathbb{S}^d$, de modo que $\|x\| = R = 1$. El potencial $U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ es constante en \mathbb{S}^d , es decir, $U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x')$ para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{S}^d$, pues la esfera es invariante por rotaciones y bastaría considerar una rotación que lleve x a x' . Tenemos entonces que

$$V_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = \int_{\mathbb{S}^d} U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) = U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) \int_{\mathbb{S}^d} d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) = U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x).$$

Por tanto, por la proposición 1.5.5, tenemos que

$$V_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = 2^{d-1} \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 f(4-4t) t^{d/2-1} (1-t)^{d/2-1} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $1 - t = u$, tenemos que

$$\begin{aligned} V_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}} &= 2^{d-1} \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 f(4u) u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du \\ &= \frac{2^{d-1} \Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 f(4u) u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du, \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Cuando K_f es el s -núcleo de Riesz, con $0 < s < d$, el potencial $U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ tiene la siguiente representación en términos de la función hipergeométrica:

Proposición 1.5.7. Sea $d \in \mathbb{N}$. Entonces, para $0 < s < d$ y para cada $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ con $\|x\| = R > 0$, tenemos que

$$(1.5.5) \quad U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|x - y\|^s} d\mu_{\mathbb{S}^d}(y) = (R+1)^{-s} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4R}{(R+1)^2}\right).$$

Demostración. Por la proposición 1.5.5 tenemos que

$$U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = 2^{d-1} \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 f((R+1)^2 - 4Ru) u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du.$$

Dado que en este caso $f(\|x - y\|^2) = (\|x - y\|^2)^{-s/2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f((R+1)^2 - 4Ru) &= ((R+1)^2 - 4Ru)^{-s/2} = \left((R+1)^2 - 4Ru \frac{(R+1)^2}{(R+1)^2} \right)^{-s/2} \\ &= (R+1)^{-s} \left(1 - \frac{4Ru}{(R+1)^2} \right)^{-s/2}. \end{aligned}$$

Llevando esto a la integral anterior, obtenemos que

$$U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = \frac{2^{d-1}}{(R+1)^s} \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^1 \left(1 - \frac{4Ru}{(R+1)^2} \right)^{-s/2} u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du.$$

Por la fórmula 1.3.9, concluimos que

$$U_{K_f}^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = \frac{2^{d-1}}{(R+1)^s} \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})^2}{\Gamma(d)} \cdot {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4R}{(R+1)^2}\right).$$

Finalmente, por (1.3.3) tenemos que

$$\frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^d)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})^2}{\Gamma(d)} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(d)} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(d)} = \frac{2^{1-d}\sqrt{\pi}\Gamma(d)}{\sqrt{\pi}\Gamma(d)} = 2^{1-d}.$$

de donde se sigue la fórmula buscada. \square

Con todo lo anterior, podemos calcular ya el valor de la energía continua asociada al potencial de Riesz:

Corolario 1.5.8. *Sea $d \in \mathbb{N}$. Entonces, para $0 < s < d$, se tiene que*

$$(1.5.6) \quad V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = \frac{2^{d-s-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(d-\frac{s}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(d-s)}{\Gamma(\frac{d-s+1}{2})\Gamma(d-\frac{s}{2})}.$$

Demostración. En este caso tenemos que el núcleo es $K_s(x, y) = (\|x - y\|^2)^{-s/2}$, por lo que, aplicando la proposición 1.5.6, tenemos que

$$\begin{aligned} V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} &= \frac{2^{d-1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 (4u)^{-s/2} u^{d/2-1} (1-u)^{d/2-1} du \\ &= \frac{2^{d-s-1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^1 u^{(d-s-2)/2} (1-u)^{d/2-1} du = \frac{2^{d-s-1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})} B\left(\frac{d-s}{2}, \frac{d}{2}\right) \\ &= \frac{2^{d-s-1}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(\frac{d-s}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(d-\frac{s}{2})} = \frac{2^{d-s-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(d-\frac{s}{2})}, \end{aligned}$$

con lo que hemos probado la primera igualdad. Para probar la segunda igualdad, por la fórmula de duplicación para la función gamma (1.3.3) tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{d-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-s+1}{2}\right) = 2^{1-d+s} \sqrt{\pi} \Gamma(d-s).$$

Llevando esto a la expresión anterior, concluimos que

$$V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = \frac{2^{d-s-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2}) 2^{1-d+s} \sqrt{\pi} \Gamma(d-s)}{\Gamma(\frac{d-s+1}{2})\Gamma(d-\frac{s}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(d-s)}{\Gamma(\frac{d-s+1}{2})\Gamma(d-\frac{s}{2})},$$

con lo que obtenemos también la segunda igualdad. \square

Llegados a este punto, nos encontramos ya en situación de abordar los resultados de separación que constituyen el objetivo principal de este trabajo.

CAPÍTULO 2

Resultados de separación

Tras haber introducido en el capítulo anterior los rudimentos del problema de minimización de la energía de Riesz en esferas, podríamos plantearnos la siguiente pregunta: dada una colección ω_N de N puntos que minimizan la s -energía en \mathbb{S}^d , ¿estarán estos puntos bien separados, independientemente del valor de N ? Recordemos que la *distancia de separación* de una configuración $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ de N puntos en \mathbb{S}^d se define como

$$\delta(\omega_N) := \min_{1 \leq i \neq j \leq N} \|x_i - x_j\|,$$

y decimos que una familia $\{\omega_N\}_2^\infty$ de configuraciones de puntos en \mathbb{S}^d está *bien separada* si existe una constante $C = C(d) > 0$, independiente de N , tal que para todo $N \geq 2$ se cumple que

$$(2.0.1) \quad \delta(\omega_N) \geq CN^{-1/d}.$$

Es posible que el lector piense que la respuesta a la pregunta que nos hacíamos en el primer párrafo es que los puntos de una configuración minimizante estarán obviamente bien separados, pues es cierto que, a la vista de las expresiones de los núcleos de Riesz y logarítmico mostrados en las definiciones 1.5.1 y 1.5.2, tal configuración no podría estar formada por puntos demasiado próximos entre sí. En efecto, sabemos, por ejemplo, que los puntos que minimizan la energía en \mathbb{S}^1 están bien separados, al igual que ocurre en el caso de \mathbb{S}^2 para la energía logarítmica o en \mathbb{S}^d con $d \geq 2$ y $d - 2 \leq s < d$. De hecho, estos son los únicos casos —además del caso hipersingular ya mencionado en la introducción de la memoria— en los que se ha probado la existencia de una constante en el sentido de la desigualdad (2.0.1), y serán los que analicemos en el presente capítulo, con la salvedad de que en \mathbb{S}^d nos limitaremos al caso $d - 1 \leq s < d$. Esto quiere decir que, aunque intuitivamente parezca evidente, desconocemos si los puntos que minimizan la energía logarítmica en \mathbb{S}^d con $d \geq 3$ están bien separados, o si lo están en el caso $s < d - 2$.

2.1. Puntos bien separados en \mathbb{S}^1

Comenzaremos nuestro análisis de la distancia de separación de configuraciones minimizantes en esferas con el caso más sencillo: el de la circunferencia unidad. Para ello, probaremos en primer lugar que en \mathbb{S}^1 la única —salvo rotación— configuración de puntos que minimiza la energía para una amplia familia de núcleos, tanto en el caso de la distancia euclídea como en el de la distancia geodésica, es la formada por puntos equiespaciados; esto equivale a decir que las configuraciones óptimas de N puntos son las constituidas por las raíces N -ésimas de

la unidad rotadas una fase arbitraria. Una vez probado esto, para obtener el resultado de separación buscado bastará con calcular cómo varía la distancia de separación de las raíces N -ésimas de la unidad en función de N . Salvo que se indique lo contrario, en esta sección seguiremos la sección 2.3 del libro de [Borodachov, Hardin y Saff \(2019\)](#).

En lo que resta de esta sección, supondremos que la circunferencia \mathbb{S}^1 tiene una cierta orientación y denotaremos mediante $L(x, y)$ la distancia del punto x al punto y a lo largo de \mathbb{S}^1 en el sentido dado por su orientación y mediante $\ell(x, y)$ la distancia geodésica entre x e y en \mathbb{S}^1 , esto es, la longitud del arco más corto en \mathbb{S}^1 que une x e y . Notemos que todas las nociones introducidas en la sección 1.5 pueden formularse de forma análoga para la distancia geodésica, pues pueden definirse, de hecho, para cualquier otra métrica distinta de la euclídea.

Comenzaremos analizando el caso de la distancia geodésica; para ello, necesitaremos recordar la definición de función convexa y probar una útil desigualdad, conocida como *desigualdad de Jensen*.

Definición 2.1.1. Una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I se dice *convexa* si para todo par de puntos $x, y \in I$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$(2.1.1) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Una función f se dice *estrictamente convexa* si la desigualdad (2.1.1) es estricta cuando $0 < \lambda < 1$ y $x \neq y$. Una función f se dice (*estrictamente*) *cóncava* si la función $-f$ es (estrictamente) convexa.

Proposición 2.1.2 (Desigualdad de Jensen). *Sea f una función convexa en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, para cualesquiera números $x_1, \dots, x_n \in I$ y para cualesquiera pesos positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, se verifica la siguiente desigualdad, conocida como desigualdad de Jensen¹:*

$$(2.1.2) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

En particular, tomando todos los pesos iguales, se tiene que

$$(2.1.3) \quad f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Demostración. Procederemos por inducción en n . Dado que f es convexa, en el caso $n = 2$ la desigualdad se verifica. Por tanto, supongamos que es cierto para n y probémoslo para $n + 1$. Sean entonces $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} > 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lambda_{n+1} < 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

¹Bajo el nombre de desigualdad de Jensen pueden encontrarse formulaciones más generales de la desigualdad mostrada y que son aplicables a otros ámbitos como teoría de la medida o teoría de la probabilidad. Sin embargo, en este trabajo será suficiente con esta sencilla versión.

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i f(x_i),$$

como queríamos probar. \square

Teorema 2.1.3. *Sea $f: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y decreciente definida en $t = 0$ por el valor (posiblemente infinito) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$, y sea K el núcleo en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ definido por $K(x, y) = f(\ell(x, y))$. Entonces, una configuración de N puntos igualmente espaciados en \mathbb{S}^1 con respecto a la longitud de arco minimiza la K -energía discreta. Además, si f es estrictamente convexa, éstas son las únicas configuraciones de N puntos que alcanzan un mínimo global.*

Demostración. Sea $\omega_N := \{x_1, \dots, x_N\}$ una configuración arbitraria de N puntos en \mathbb{S}^1 y supongamos que los puntos están etiquetados de forma que el subíndice se incrementa en el sentido de la orientación de \mathbb{S}^1 . Asimismo, denotaremos $x_{N+i} := x_i$, con $i = 1, \dots, N$. Dado que $\ell(x_j, x_k) \leq L(x_j, x_k)$ para todo par de puntos de la configuración, tenemos, para $1 \leq k \leq N-1$, que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \ell(x_j, x_{j+k}) &\leq \sum_{j=1}^N L(x_j, x_{j+k}) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^k L(x_{j+n-1}, x_{j+n}) \\ &= \sum_{n=1}^k \sum_{j=1}^N L(x_{j+n-1}, x_{j+n}) = \sum_{n=1}^k |\mathbb{S}^1| = 2k\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\ell(x_j, x_{j+k})$ es, o bien $L(x_j, x_{j+k})$, que ha de ser menor que $2\pi - L(x_j, x_{j+k})$ por ser en este caso $L(x_j, x_{j+k}) = \ell(x_j, x_{j+k})$ la distancia más corta, o bien $2\pi - L(x_j, x_{j+k})$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^N \ell(x_j, x_{j+k}) \leq \sum_{j=1}^N (2\pi - L(x_j, x_{j+k})) = 2N\pi - \sum_{j=1}^N L(x_j, x_{j+k}) = 2(N-k)\pi.$$

Denotemos ahora mediante $\omega_N^* := \{z_1, \dots, z_N\}$ una configuración de puntos equiespaciados en \mathbb{S}^1 con respecto a la longitud de arco. Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, tenemos que

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ell(x_j, x_{j+k}) \leq \frac{2\pi}{N} \min\{k, N-k\} = \ell(z_1, z_{k+1}).$$

Dado que la función f es convexa y decreciente, tenemos que

$$\begin{aligned} (2.1.4) \quad E_K(\omega_N) &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N f(\ell(x_j, x_{j+k})) \geq N \sum_{k=1}^{N-1} f\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ell(x_j, x_{j+k})\right) \\ &\geq N \sum_{k=1}^{N-1} f(\ell(z_1, z_{k+1})) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N f(\ell(z_j, z_{j+k})) = E_K(\omega_N^*), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos aplicado la desigualdad de Jensen (2.1.2) tomando todos los pesos iguales a $1/N$ y en la segunda desigualdad hemos utilizado que f es decreciente. En caso de que f sea estrictamente convexa, obtenemos una desigualdad estricta siempre y cuando los puntos de ω_N no estén igualmente espaciados. \square

El siguiente teorema, que es en realidad un corolario del anterior, muestra que las configuraciones de puntos equiespaciados minimizan la energía en el caso en que el núcleo depende de la distancia euclídea en \mathbb{S}^1 .

Teorema 2.1.4. *Sea $f: (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y decreciente definida en $t = 0$ por el valor (posiblemente infinito) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Entonces, toda configuración ω_N^* de puntos igualmente espaciados en \mathbb{S}^1 minimiza la energía discreta asociada al núcleo $K(x, y) = f(\|x - y\|)$. Si, además, f es estrictamente convexa o estrictamente decreciente, entonces ninguna otra configuración de N puntos es óptima.*

Demostración. Probemos en primer lugar que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{S}^1$, se tiene que

$$\|x - y\| = 2 \sin \frac{\ell(x, y)}{2}.$$

Con la notación de la figura 2.1, por el teorema de los senos tenemos que

$$\|x - y\| = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(2 \cdot \frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})} = \frac{2 \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

Teniendo en cuenta que $\ell(x, y)$ coincide con α por tratarse de una circunferencia de radio 1, se obtiene la igualdad buscada.

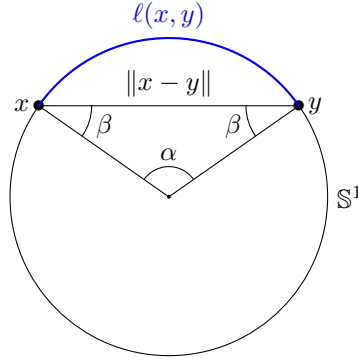


FIGURA 2.1. Distancia euclídea y distancia geodésica entre dos puntos de la circunferencia unidad.

Afirmación. La función $g(t) := f(2 \sin(t/2))$ es convexa y decreciente en $(0, \pi]$.

Demostración de la afirmación. Denotemos $h(t) := 2 \sin(t/2)$. Tenemos que f es convexa y decreciente en $(0, 2]$ y $h(t)$ es cóncava y creciente en $(0, \pi]$. Veamos en primer lugar que g es convexa. Sean $x, y \in (0, \pi]$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(h(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq f(\lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)) \\ &\leq \lambda f(h(x)) + (1 - \lambda)f(h(y)) = \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado que h es cóncava y f decreciente, y en la segunda, que f es convexa. Notemos que si f es estrictamente decreciente o estrictamente convexa, entonces las desigualdades anteriores son estrictas y g es estrictamente convexa. Veamos que g es decreciente. Sean $x, y \in (0, \pi]$, con $x < y$. Entonces,

$$g(x) = f(h(x)) \geq f(h(y)) = g(y).$$

Una vez que hemos probado que $g(t)$ es convexa y decreciente en $(0, \pi]$, por el teorema 2.1.3 tenemos que las configuraciones de puntos igualmente espaciados minimizan la energía en \mathbb{S}^1 con respecto al núcleo $K(x, y) = g(\ell(x, y)) = f(\|x - y\|)$. Notemos, además, que si f es estrictamente convexa o estrictamente decreciente en $(0, 2]$, entonces la función g es estrictamente convexa en $(0, \pi]$, pues las desigualdades obtenidas en la prueba de la afirmación son estrictas en cualquiera de esos casos; luego, por el teorema 2.1.3, tenemos que las configuraciones de N puntos equiespaciados en \mathbb{S}^1 son las únicas que minimizan la energía. \square

Observación 2.1.7. El teorema 2.1.4 puede generalizarse de forma trivial a circunferencias de radio R arbitrario. Basta tomar como dominio de f el intervalo $(0, 2R]$.

Es una comprobación inmediata —basta calcular las derivadas— que el s -núcleo de Riesz definido en 1.5.1 es una función estrictamente convexa y decreciente si $s > 0$, al igual que el núcleo logarítmico definido en 1.5.2. Por tanto, el teorema 2.1.4 implica que las configuraciones formadas por N puntos equiespaciados en \mathbb{S}^1 resuelven el problema de minimización de la s -energía discreta en los casos $s > 0$ y $s = \log$.

Con todo lo anterior, determinar cómo de bien separadas están las configuraciones de puntos equiespaciados en \mathbb{S}^1 no es más que un sencillo cálculo:

Teorema 2.1.8. *Sea $f: (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa y decreciente definida en $t = 0$ por el valor (posiblemente infinito) $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Sea ω_N^* una configuración que minimiza la energía en \mathbb{S}^1 con respecto al núcleo $K(x, y) = f(\|x - y\|)$. Entonces, la distancia de separación verifica que*

$$\delta(\omega_N^*) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \geq \frac{4}{N}.$$

Demostración. Como ya hemos probado, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{S}^1$ se tiene que

$$\|x - y\| = 2 \sin\left(\frac{\ell(x, y)}{2}\right).$$

En el caso de puntos equiespaciados en \mathbb{S}^1 , la longitud del arco más corto que los une coincide con el ángulo subtendido por dicho arco desde el centro, que, en el caso de que sean puntos consecutivos, es $2\pi/N$. Por tanto,

$$\delta(\omega_N^*) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{2N}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right).$$

Probemos entonces la desigualdad. Dado que en el caso $N = 2$ se cumple con igualdad, basta ver que la función $f(N) = N \sin(\pi/N)$ es creciente. Calculemos su primera derivada:

$$f'(N) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) + N \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{N^2}\right)\right) = \left(\sin(\pi/N) - \frac{\pi}{N} \cos(\pi/N)\right).$$

Su segunda derivada vendrá dada por

$$\begin{aligned} f''(N) &= \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{N^2}\right) - \pi \left(\frac{-N \sin(\pi/N)(-\pi/N^2) - \cos(\pi/N)}{N^2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{N^2}\right) - \frac{\pi^2}{N^3} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) + \frac{\pi}{N^2} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) = -\frac{\pi^2}{N^3} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right), \end{aligned}$$

luego $f''(N) \leq 0$ para todo $N \geq 2$, con lo que $f'(N)$ es decreciente. Dado que $\lim_{N \rightarrow \infty} f'(N) = 0$, necesariamente ha de ser $f'(N) > 0$ para $N \geq 2$, luego $f(N)$ es creciente, como queríamos probar. \square

2.2. Puntos bien separados en \mathbb{S}^2

Una vez que hemos visto que en \mathbb{S}^1 las únicas configuraciones de puntos que minimizan la energía son las constituidas por puntos equiespaciados y que los puntos de dichas configuraciones están bien separados, parece natural preguntarse qué ocurrirá al aumentar en uno la dimensión. Sabemos que encontrar puntos que minimicen la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 no es una tarea precisamente sencilla; a pesar de ello, sí que sabemos que los puntos de esas configuraciones minimizantes, conocidos como *puntos elípticos de Fekete*, estarán bien separados. El primer resultado que mostró esto fue probado por [Rakhmanov, Saff y Zhou \(1995\)](#), quienes obtuvieron la cota inferior $\delta(\omega_N^*) \geq 3/(5\sqrt{N})$; esta cota sería mejorada un año más tarde por [Dubickas \(1996\)](#) hasta $7/(4\sqrt{N})$. La mejor cota conocida hasta la fecha se debe a [Dragnev \(2002\)](#):

Teorema 2.2.1. *Sea ω_N^* , con $N \geq 2$, una configuración que minimiza la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 . Entonces, la distancia de separación satisface que*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{2}{\sqrt{N-1}}.$$

Con el objetivo de mejorar nuestra comprensión de las ideas que condujeron a la prueba del resultado original de [Rakhmanov, Saff y Zhou \(1995\)](#), en esta sección iremos un poco más allá de dicho resultado, mejorando la cota inferior para la distancia de separación de $3/(5\sqrt{N})$ a $19/(25\sqrt{N})$. Es una mejora destacable, aunque todavía lejos del ya mencionado resultado de [Dragnev \(2002\)](#). Así, el teorema que queremos probar es el siguiente:

Teorema 2.2.2. *Si ω_N^* , con $N \geq 2$, es una configuración que minimiza la energía logarítmica en \mathbb{S}^2 , entonces la distancia de separación verifica que*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{19}{25} \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

La idea de la demostración, que se basa en la realizada por [Rakhmanov, Saff y Zhou \(1995\)](#) con algunas mejoras introducidas por nosotros, es la siguiente. En primer lugar, fijaremos un punto de la configuración minimizante y supondremos que se encuentra en el polo sur de la esfera —en caso de que no fuese así, bastaría una simple rotación—. A continuación, utilizaremos la proyección estereográfica para enviar los puntos de la configuración ω_N^* al plano ecuatorial de la esfera, que identificamos con \mathbb{C} . Dado que el punto fijado en el polo sur se proyecta en el origen de \mathbb{C} , bastará probar entonces que cada una de las proyecciones del resto de los puntos de ω_N^* se encuentra a una distancia del origen mayor que una cierta cota. Esta cota inferior en \mathbb{C} para el módulo de las proyecciones nos proporcionará automáticamente una cota en \mathbb{S}^2 para la distancia de los puntos de ω_N^* al punto fijado. Dicho esto, veamos la demostración con más detalle:

Demostración del teorema 2.2.2. Denotemos $\omega_N^* = \{x_1^*, \dots, x_N^*\}$. Para demostrar el teorema basta probar que

$$\|x_1^* - x_j^*\| \geq \frac{19}{25} \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \forall j = 2, \dots, N.$$

Dado que ω_N^* es una configuración minimizante, para cualquier otra configuración de N puntos $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ se tendrá que

$$(2.2.1) \quad \prod_{i=2}^N \|x - x_i^*\| \cdot \prod_{\substack{2 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} \|x_i^* - x_j^*\|$$

alcanza su máximo sobre \mathbb{S}^2 en $x = x_1^*$.

Consideremos ahora la proyección estereográfica, que viene dada por

$$\begin{aligned} \pi: \quad \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}. \end{aligned}$$

Denotemos $z_i = \pi(x_i^*)$, con $i = 1, 2, \dots, N$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que x_1^* es el polo sur de la esfera \mathbb{S}^2 , con lo que $z_1 = \pi(x_1^*) = 0$. Recordemos que si tenemos dos puntos $x, x' \in \mathbb{S}^2$ cuyas proyecciones estereográficas son, respectivamente, z y z' , se puede escribir la distancia euclídea entre x y x' en función de la distancia entre z y z' como sigue:

$$(2.2.2) \quad \|x - x'\| = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}.$$

Una prueba de este hecho puede encontrarse, por ejemplo, en [Ahlfors, 1979, §2.4]. Así, teniendo en cuenta la expresión (2.2.2), tenemos que

$$\prod_{i=2}^N \|x - x_i^*\| = \prod_{i=2}^N \frac{2|z - z_i|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z_i|^2)}} = \prod_{i=2}^N \frac{2}{\sqrt{(1 + |z_i|^2)}} \frac{|z - z_i|}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Por tanto, por lo dicho arriba tenemos que la expresión

$$\prod_{i=2}^N \frac{|z - z_i|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = \prod_{i=2}^N |z - z_i| \cdot (1 + |z|^2)^{-(N-1)/2}$$

alcanza su máximo sobre \mathbb{C} en $z = z_1 = 0$. Llamemos $p(z) = \prod_{i=2}^N (z - z_i)$. Dado que $|p(z)| \cdot (1 + |z|^2)^{-(N-1)/2}$ alcanza su máximo en $z = 0$, y en dicho punto vale $|p(0)|$, tenemos que

$$|p(0)| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ |p(z)| \cdot (1 + |z|^2)^{-(N-1)/2} \right\},$$

luego

$$|p(z)| \cdot (1 + |z|^2)^{-(N-1)/2} \leq |p(0)|,$$

con lo que

$$(2.2.3) \quad |p(z)| \leq |p(0)| \cdot (1 + |z|^2)^{(N-1)/2} \leq |p(0)| \cdot (1 + |z|^2)^{N/2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sea ahora $z' \in \{z_i\}_{i=2}^N$. Dado que $p(z)$ es holomorfa en todo \mathbb{C} , para todo abierto $U \subset \mathbb{C}$ y para toda curva $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ tenemos que

$$\int_{\gamma} p'(\zeta) d\zeta = p(\gamma(b)) - p(\gamma(a)).$$

Tomando $U = \mathbb{B}$, donde \mathbb{B} es la bola unidad abierta, podemos considerar el camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ dado por $\gamma(t) = tz'$, de modo que $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = z'$. Así, obtenemos que

$$\int_{\gamma} p'(\zeta) d\zeta = p(z') - p(0) = -p(0),$$

pues recordemos que $z' \in \{z_i\}_{i=2}^N$. Por tanto,

$$(2.2.4) \quad |p(0)| = \left| \int_{\gamma} p'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_0^1 |p'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |p'(tz')| \cdot |z'| dt.$$

Sean $r(|\zeta|)$ y $R(|\zeta|)$ dos funciones² tales que $|\zeta| \leq r(|\zeta|) < R(|\zeta|)$ para cada $\zeta \in \gamma$. Entonces, utilizando la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$p'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R(|\zeta|)} \frac{p(\xi)}{(\xi - \zeta)^2} d\xi, \quad \zeta \in \gamma,$$

de donde

$$\begin{aligned} (2.2.5) \quad |p'(\zeta)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|\xi|=R(|\zeta|)} \frac{p(\xi)}{(\xi - \zeta)^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{|\xi|=R(|\zeta|)} \left| \frac{p(\xi)}{(\xi - \zeta)^2} \right| \cdot 2\pi R(|\zeta|) \\ &= R(|\zeta|) \cdot \sup_{|\xi|=R(|\zeta|)} \left| \frac{p(\xi)}{(\xi - \zeta)^2} \right|. \end{aligned}$$

Notemos que

$$|\xi - \zeta|^2 \geq ||\xi| - |\zeta||^2 = |R(|\zeta|) - |\zeta||^2 \geq (R(|\zeta|) - r(|\zeta|))^2.$$

Por tanto, teniendo en cuenta la expresión (2.2.3), llegamos a que

$$\left| \frac{p(\xi)}{(\xi - \zeta)^2} \right| \leq \frac{|p(0)|(1 + |\xi|^2)^{N/2}}{(R(|\zeta|) - r(|\zeta|))^2} = \frac{|p(0)|(1 + R(|\zeta|)^2)^{N/2}}{(R(|\zeta|) - r(|\zeta|))^2},$$

con lo que, volviendo a la expresión (2.2.5), obtenemos que

$$|p'(\zeta)| \leq R(|\zeta|) \cdot \sup_{|\xi|=R(|\zeta|)} \left| \frac{p(\xi)}{(\xi - \zeta)^2} \right| \leq \frac{R(|\zeta|) |p(0)| (1 + R(|\zeta|)^2)^{N/2}}{(R(|\zeta|) - r(|\zeta|))^2}.$$

Llevando esto a la expresión (2.2.4), tenemos que

$$|p(0)| \leq \int_0^1 |p'(tz')| \cdot |z'| dt \leq \int_0^1 \frac{R(t|z'|) |p(0)| (1 + R(t|z'|)^2)^{N/2}}{(R(t|z'|) - r(t|z'|))^2} \cdot |z'| dt,$$

es decir,

$$1 \leq \int_0^1 \frac{R(t|z'|)(1 + R(t|z'|)^2)^{N/2}}{(R(t|z'|) - r(t|z'|))^2} \cdot |z'| dt.$$

Si hacemos el cambio de variable $s = t|z'|$, podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$1 \leq \int_0^{|z'|} \frac{R(s)(1 + R(s)^2)^{N/2}}{(R(s) - r(s))^2} ds.$$

Estamos suponiendo que $s \leq r(s) < R(s)$, luego podemos tomar $r(s) := s$ y $R(s) := s + C/\sqrt{N}$, con $C > 0$ una constante por determinar. Llevando estas expresiones a la desigualdad, tenemos que

$$1 \leq \int_0^{|z'|} \frac{\left(s + \frac{C}{\sqrt{N}}\right) \left(1 + \left(s + \frac{C}{\sqrt{N}}\right)^2\right)^{N/2}}{\left(s + \frac{C}{\sqrt{N}} - s\right)^2} ds = \frac{\sqrt{N}}{C^2} \int_0^{|z'|} (s\sqrt{N} + C) \left(1 + \frac{(s\sqrt{N} + C)^2}{2 \cdot \frac{N}{2}}\right)^{N/2} ds.$$

²En el artículo de [Rakhmanov, Saff y Zhou \(1995\)](#), en lugar de elegir r y R distintos para cada punto ζ del camino γ , como hacemos aquí, toman $r := 1/(3\sqrt{N})$ y $R := 4r$. Prueban entonces que, si $|z'| \leq r$, entonces $|z'| \geq 3e^{-8/9}/(4\sqrt{N})$.

Teniendo en cuenta que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right\}_n$ es creciente y tiende a e^x cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{\sqrt{N}}{C^2} \int_0^{|z'|} (s\sqrt{N} + C) e^{(s\sqrt{N}+C)^2/2} ds = \frac{1}{C^2} e^{(s\sqrt{N}+C)^2/2} \Big|_{s=0}^{s=|z'|} \\ &= \frac{1}{C^2} \left(e^{(|z'|\sqrt{N}+C)^2/2} - e^{C^2/2} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e^{(|z'|\sqrt{N}+C)^2/2} \geq C^2 + e^{C^2/2},$$

de donde, tomando logaritmos,

$$(|z'|\sqrt{N} + C)^2/2 \geq \log(C^2 + e^{C^2/2}).$$

Si despejamos $|z'|$ en esta expresión, obtenemos que

$$|z'| \geq \frac{\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C}{\sqrt{N}},$$

con lo que, a falta de determinar qué constante C hemos de tomar, ya hemos obtenido una cota inferior para la distancia entre las proyecciones de los puntos x_2^*, \dots, x_N^* de ω_N^* y el origen de \mathbb{C} , que, recordemos, es la proyección de x_1^* . Por tanto, los puntos que más cerca se pueden encontrar de x_1^* son aquéllos para cuya proyección se dé la igualdad en la desigualdad anterior. Sea entonces $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = (\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C)/\sqrt{N}$, y sea $x = \pi^{-1}(z)$ el punto correspondiente en \mathbb{S}^2 . La distancia euclídea de x al polo sur será, por (2.2.2),

$$\begin{aligned} \|x - x_1^*\| &= \frac{2|z - 0|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |0|^2)}} = \frac{2|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = \frac{2\left(\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C\right) \frac{1}{\sqrt{N}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C}{\sqrt{N}}\right)^2}} \\ &\geq \frac{2\left(\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Numéricamente se puede comprobar que el valor máximo de

$$\frac{2\left(\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2\log(C^2 + e^{C^2/2})} - C}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

se alcanza para $C \approx 0.97941$. Tomando este valor, obtenemos que

$$\|x - x_1^*\| > 0.76248 \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} > \frac{19}{25} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}},$$

lo que completa la prueba. \square

2.3. Puntos bien separados en \mathbb{S}^d

En la sección anterior nos hemos ocupado del caso $s = \log$ en \mathbb{S}^2 , pero podríamos preguntarnos también si en el caso $0 < s < 2$ las configuraciones minimizantes estarán bien separadas o si existirán resultados similares en el caso de \mathbb{S}^d , con $d > 2$. Pues bien, la respuesta a ambas cuestiones es afirmativa. La primera aportación relevante en este sentido se debe a [Dahlberg \(1978\)](#), quien probó que las configuraciones minimizantes de la s -energía están bien separadas en el caso $s = d - 1$, un resultado que, de hecho, puede aplicarse a conjuntos más generales que la esfera. Más recientemente, [Kuijlaars, Saff y Sun \(2007\)](#) demostraron el siguiente resultado, que muestra que los puntos que minimizan la s -energía están bien separados en el caso $d - 1 \leq s < d$:

Teorema 2.3.1. *Si $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ y $d - 1 \leq s < d$, existe una constante $\lambda_{s,d} > 0$ tal que, para todo $N \geq 2$, la distancia de separación de cualquier configuración ω_N^* que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d satisface que*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{\lambda_{s,d}}{N^{1/d}}.$$

Este teorema sentó las bases para futuras mejoras en esta dirección y es, por tanto, el que probaremos en esta sección. Más tarde se vería superado por el siguiente resultado, probado por [Dragnev y Saff \(2007\)](#) para $d - 2 < s < d$ y por [Brauchart, Dragnev y Saff \(2014\)](#) para $s = d - 2$, y que generaliza el caso de \mathbb{S}^2 :

Teorema 2.3.2 ([Borodachov, Hardin y Saff, 2019, Thm. 6.9.2](#)). *Si $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ y $d - 2 \leq s < d$, entonces cualquier configuración ω_N^* que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d satisface que*

$$(2.3.1) \quad \delta(\omega_N^*) \geq \frac{C_{s,d}}{N^{1/d}},$$

donde

$$C_{s,d} := \left(\frac{2B(d/2, 1/2)}{B(d/2, (d-s)/2)} \right)^{1/d} = \frac{2^{(1-s)/d}}{(V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}})^{1/d}}.$$

Como hemos mencionado, el objetivo de esta sección es la prueba del teorema 2.3.1. La demostración de este resultado se basa, fundamentalmente, en comparar sobre la esfera de radio $1 + N^{-1/d}$, que podemos ver como la esfera unidad \mathbb{S}^d ligeramente agrandada, los s -potenciales de Riesz $U_s^{\nu_{\omega_N^*}}$ y $U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ con la energía continua $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ de la esfera \mathbb{S}^d . Así, comenzaremos probando, en el lema 2.3.3, una desigualdad que relaciona el potencial $U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ con $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ para los puntos de la esfera de radio $1 + N^{-1/d}$. A continuación, en el lema 2.3.5 obtendremos una desigualdad similar para el potencial $U_s^{\nu_{\omega_N^*}}$, aunque restringida a los puntos de la esfera \mathbb{S}^d . Para extender dicha desigualdad a la esfera agrandada necesitaremos introducir la definición de función α -superarmónica, una definición técnica pero necesaria para nuestros propósitos. En el lema 2.3.7 probaremos que $U_s^{\nu_{\omega_N^*}}$ es, de hecho, una función α -superarmónica y, utilizando un principio de dominación para esta clase de funciones, seremos capaces, en el lema 2.3.10, de relacionar el potencial $U_s^{\nu_{\omega_N^*}}$ con la energía continua $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ sobre la esfera de radio $1 + N^{-1/d}$. Finalmente, el lema 2.3.11 nos permitirá relacionar la energía $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ con la distancia entre los puntos de una configuración minimizante, de modo que, tras probar un último resultado sobre conjuntos convexos, dispondremos ya de todas las herramientas necesarias para probar el teorema 2.3.1. Comencemos, pues, con la prueba del primero de los lemas. Salvo que se indique lo contrario, seguiremos la sección 6.9 del libro de [Borodachov, Hardin y Saff \(2019\)](#).

Lema 2.3.3. Para $d-1 \leq s < d$, existen una constante $C = C(s, d) > 0$ y un entero positivo N_0 tales que

$$U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - CN^{-1+s/d}$$

para todo $N \geq N_0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ con $\|x\| = 1 + N^{-1/d}$.

Demostración. Recordemos que en la proposición 1.5.7 probamos que para $0 < s < d$ y $\|x\| = R$ el potencial $U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x)$ admitía la siguiente representación en términos de la función hipergeométrica:

$$U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = (R+1)^{-s} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4R}{(R+1)^2}\right).$$

Nuestro objetivo es utilizar esta representación para probar la desigualdad del lema. Denotemos entonces

$$R_N := 1 + N^{-1/d}, \quad \alpha_N := \frac{4R_N}{(R_N+1)^2}, \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dado que $N^{-1/d} \leq 1$, se tiene que $R_N \leq 2$ y, por tanto,

$$0 < \alpha_N = \frac{4R_N}{(R_N+1)^2} < \frac{4R_N}{R_N^2 + 2R_N} \leq 1,$$

luego $0 < \alpha_N < 1$. Dicho esto, consideremos la función $g(t) := {}_2F_1(s/2, d/2; d; t)$, definida en el intervalo $[-1, 1]$. Veamos cómo podemos estimar $g(\alpha_N)$. Por la proposición 1.3.8, tenemos que $g(t)$ converge en $t = 1$, ya que $d - s/2 - d/2 = (d-s)/2 > 0$. Además, por el teorema 1.3.7 tenemos que $g(t)$ es continua por la izquierda en $t = 1$, luego

$$(2.3.2) \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = g(1) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(d - \frac{s}{2})\Gamma(d/2)}.$$

Por otro lado, por la fórmula (1.3.8) para la derivada de la función hipergeométrica tenemos que

$$g'(t) = \frac{s}{4} {}_2F_1\left(\frac{s}{2} + 1, \frac{d}{2} + 1; d + 1; t\right) =: \frac{s}{4} h(t),$$

donde $h(t)$ está definida en $(-1, 1)$. Por hipótesis tenemos que $d-1 \leq s < d$, luego $d+1-s/2-1-d/2-1 = (d-s)/2-1 < 0$, con lo que, por la proposición 1.3.8, tenemos que $h(t)$ diverge en $t = 1$. Por tanto, la integral

$$(2.3.3) \quad \frac{s}{4} \int_{\alpha_N}^1 h(t) dt$$

es impropia. Para sortear este obstáculo, recordemos que, por la fórmula (1.3.11), tenemos que

$$(2.3.4) \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{h(t)}{(1-t)^{(d-s)/2-1}} = \frac{\Gamma(d+1)\Gamma(\frac{s-d+2}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)\Gamma(\frac{d}{2}+1)} =: \beta_{d,s}.$$

Por tanto, por el criterio de comparación del límite para integrales impropias, tenemos que la integral (2.3.3) converge si y sólo si $\int_{\alpha_N}^1 (1-t)^{(d-s)/2-1} dt$ converge. Calculemos esta última integral:

$$\int_{\alpha_N}^1 (1-t)^{(d-s)/2-1} dt = \frac{-2(1-t)^{(d-s)/2}}{d-s} \Big|_{t=\alpha_N}^{t=1} = \frac{2(1-\alpha_N)^{(d-s)/2}}{d-s},$$

con lo que concluimos que la integral $\int_{\alpha_N}^1 h(t) dt$ converge. Tenemos entonces que

$$(2.3.5) \quad \frac{s}{4} \int_{\alpha_N}^1 h(t) dt = \int_{\alpha_N}^1 g'(t) dt = g(1) - g(\alpha_N).$$

Por (2.3.4), tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_1 > 0$ tal que para todo $N > N_1$ se verifica que

$$\frac{h(t)}{(1-t)^{(d-s)/2-1}} \leq \beta_{d,s} + 1, \quad t \in [\alpha_N, 1),$$

con lo que

$$h(t) \leq (\beta_{d,s} + 1)(1-t)^{(d-s)/2-1}, \quad t \in [\alpha_N, 1).$$

Por tanto, integrando a ambos lados de la desigualdad y teniendo en cuenta que $1 - \alpha_N = (4N^{2/d})^{-1}(1 + o(1))$ cuando $N \rightarrow \infty$ (véase el apéndice B para una justificación de este hecho), tenemos que

$$(2.3.6) \quad \begin{aligned} \int_{\alpha_N}^1 h(t) dt &\leq (\beta_{d,s} + 1) \int_{\alpha_N}^1 (1-t)^{(d-s)/2-1} dt = \frac{2(\beta_{d,s} + 1)}{d-s} (1 - \alpha_N)^{(d-s)/2} \\ &= \frac{2(\beta_{d,s} + 1)}{d-s} \left(\frac{1}{4N^{2/d}} (1 + o(1)) \right)^{(d-s)/2} \\ &= \frac{2(\beta_{d,s} + 1)}{d-s} \frac{1}{2^{d-s} N^{(d-s)/d}} (1 + o(1))^{(d-s)/2} \\ &= \frac{2^{1-d+s}(\beta_{d,s} + 1)}{d-s} (1 + o(1))^{(d-s)/2} N^{-1+s/d}. \end{aligned}$$

Dado que $(1 + o(1))^{(d-s)/2}$ tiende a 1 cuando $N \rightarrow \infty$, existirá un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1 + o(1))^{(d-s)/2} \leq 1 + \frac{d-s}{2^{1-d+s}(\beta_{d,s} + 1)}, \quad N > N_2,$$

pues estamos sumando una constante positiva. Por tanto, llevando esto a la ecuación (2.3.6), tenemos que

$$(2.3.7) \quad \int_{\alpha_N}^1 h(t) dt \leq C_0 N^{-1+s/d}, \quad N > N_2,$$

donde $C_0 = 2^{1-d+s}(\beta_{d,s} + 1)/(d-s) + 1$. Por otro lado, utilizando la fórmula (1.5.6) y la fórmula de duplicación para la función gamma (1.3.3) con $z = d/2$, deducimos que

$$(2.3.8) \quad \begin{aligned} V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} &= \frac{2^{d-s-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(d - \frac{s}{2})} = \frac{2^{d-s-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2^{1-d}\sqrt{\pi}\Gamma(d)\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(d - \frac{s}{2})} \\ &= 2^{-s} \frac{\Gamma(d)\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(d - \frac{s}{2})}. \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta (2.3.2), (2.3.8) y la desigualdad (2.3.7), podemos despejar ya $g(\alpha_N)$ en (2.3.5):

$$(2.3.9) \quad \begin{aligned} g(\alpha_N) &= g(1) - \frac{s}{4} \int_{\alpha_N}^1 h(t) dt \geq \frac{\Gamma(d)\Gamma(\frac{d-s}{2})}{\Gamma(d - \frac{s}{2})\Gamma(\frac{d}{2})} - \frac{s}{4} C_0 N^{-1+s/d} \\ &= 2^s V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{s C_0}{4} N^{-1+s/d}, \quad N > N_2. \end{aligned}$$

Además, se puede comprobar (véase el apéndice B) que

$$(2.3.10) \quad (R_N + 1)^{-s} = 2^{-s} \left(1 - \frac{s}{2} N^{-1/d} + o(N^{-1/d}) \right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Dado que $d - 1 \leq s < d$, tenemos que $-1/d \leq -1 + s/d$, luego $N^{-1/d} \leq N^{-1+s/d}$. Entonces, por (2.3.9), (2.3.10) y por la proposición 1.5.7, existirán una constante $C > 0$ y un entero positivo N_0 tales que para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, con $\|x\| = R_N = 1 + N^{-1/d}$,

$$\begin{aligned} U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) &= (R_N + 1)^{-s} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4R_N}{(R_N + 1)^2}\right) = (R_N + 1)^{-s} g(\alpha_N) \\ &\geq (R_N + 1)^{-s} \left(2^s V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{sC_0}{4} N^{-1+s/d} \right) \\ &\geq 2^{-s} \left(1 - \left(\frac{s}{2} + 1 \right) N^{-1/d} \right) \left(2^s V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{sC_0}{4} N^{-1+s/d} \right) \\ &= \left(1 - \left(\frac{s}{2} + 1 \right) N^{-1/d} \right) \left(V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{sC_0}{4 \cdot 2^s} N^{-1+s/d} \right) \\ &\geq \left(1 - \left(\frac{s}{2} + 1 \right) N^{-1+s/d} \right) \left(V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{sC_0}{4 \cdot 2^s} N^{-1+s/d} \right), \quad N \geq N_0. \end{aligned}$$

Llamemos $C_1 = s/2 + 1 > 0$ y $C_2 = sC_0/(4 \cdot 2^s)$. Para completar la demostración del lema necesitamos probar que existe una constante $C = C(s, d) > 0$ tal que

$$U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - CN^{-1+s/d}, \quad N \geq N_0.$$

Veamos entonces qué condición ha de cumplir la constante C . Comparando las desigualdades obtenidas arriba con la condición que se debe cumplir, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(1 - C_1 N^{-1+s/d} \right) \left(V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - C_2 N^{-1+s/d} \right) &\geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - CN^{-1+s/d} \\ \iff V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} C_1 N^{-1+s/d} - C_2 N^{-1+s/d} + C_1 C_2 \left(N^{-1+s/d} \right)^2 &\geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - CN^{-1+s/d} \\ \iff C &\geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} C_1 + C_2 - C_1 C_2 N^{-1+s/d}, \end{aligned}$$

con lo que basta tomar como C cualquier constante mayor que $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} C_1 + C_2$. Esto completa la prueba. \square

Nuestro objetivo ahora es obtener una desigualdad similar a la del lema 2.3.3 para el potencial $U_s^{\nu_{\omega_N^*}}$ asociado a la medida de conteo normalizada de una configuración minimizante ω_N^* . Para ello, comenzaremos probando en el lema 2.3.5 una desigualdad semejante para el caso de la esfera unidad y, posteriormente, la extenderemos a la esfera de radio $1 + N^{-1/d}$ en el lema 2.3.10 utilizando el hecho de que $U_s^{\nu_{\omega_N^*}}$ es una función α -superarmónica y aplicando un principio de dominación para esta clase de funciones.

Veamos entonces el caso de \mathbb{S}^d . Recordemos que en la subsección 1.5.2 definimos la constante de Wiener $W_s(\mathbb{S}^d)$ como la menor de las energías continuas asociadas a medidas de probabilidad borelianas con soporte en \mathbb{S}^d , y dijimos que la medida de Lebesgue normalizada $\mu_{\mathbb{S}^d}$ es la que proporciona la menor energía continua en \mathbb{S}^d , esto es, $W_s(\mathbb{S}^d) = V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$. Para demostrar el lema 2.3.5 necesitaremos el siguiente resultado previo:

Teorema 2.3.4 (Borodachov, Hardin y Saff, 2019, Thm. 6.4.5). *Sea $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, y $0 < s < d$. Entonces, existen dos constantes $C_1, C_2 < 0$ tales que, para todo N suficientemente grande,*

$$(2.3.11) \quad C_1 N^{1+s/d} \leq \mathcal{E}_s(\mathbb{S}^d, N) - W_s(\mathbb{S}^d) N^2 \leq C_2 N^{1+s/d}.$$

Lema 2.3.5. Para $0 < s < d$, existe una constante $c = c(s, d) > 0$ tal que para toda configuración ω_N^* que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d ,

$$U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - cN^{-1+s/d}, \quad x \in \mathbb{S}^d.$$

Demostración. El teorema 2.3.4 y la igualdad $W_s(\mathbb{S}^d) = V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$, con $0 < s < d$, implican que existe una constante $C_1 > 0$ tal que para todo $N \geq 2$,

$$(2.3.12) \quad E_s(\omega_N^*) = \mathcal{E}_s(\mathbb{S}^d, N) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} N^2 - C_1 N^{1+s/d}.$$

Sea $\omega_N^* = \{x_1, \dots, x_N\}$ una configuración minimizante de la s -energía en \mathbb{S}^d . Entonces, para todo punto $x \in \mathbb{S}^d$ y para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, tenemos que

$$(2.3.13) \quad \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s} \leq \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x - x_j\|^s},$$

pues, si existiese un punto $x' \in \mathbb{S}^d$ tal que se violase la desigualdad (2.3.13) para algún índice i' , la configuración $\bigcup_{j,j \neq i'}^N \{x_j\} \cup \{x'\}$ tendría una energía estrictamente menor, con lo que ω_N^* no sería una configuración minimizante. Sumando la desigualdad (2.3.13) sobre i , obtenemos que

$$\begin{aligned} E_s(\omega_N^*) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x - x_j\|^s} = (N-1) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|x - x_i\|^s} \\ &= N(N-1) U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \leq N^2 U_s^{\nu\omega_N^*}(x). \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta la expresión (2.3.12), concluimos que

$$U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq \frac{E_s(\omega_N^*)}{N^2} \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - C_1 N^{-1+s/d},$$

de donde, tomando $c = C_1$, se sigue la afirmación del lema. \square

Funciones α -superarmónicas. Como mencionábamos antes, para extender la desigualdad del lema 2.3.5 a la esfera de radio $1 + N^{-1/d}$ necesitamos introducir la noción de función α -superarmónica, que puede encontrarse también bajo el nombre de función superarmónica de orden fraccionario, y que fue considerada ya por [Riesz \(1938\)](#). Un breve apunte sobre la notación: en el libro de [Landkof \(1972\)](#) se denota mediante U_α^μ el $(p - \alpha)$ -potencial de Riesz de una medida μ (véase la expresión (1.5.5)), donde p es la dimensión del espacio ambiente. Dado que nosotros estamos trabajando en \mathbb{R}^{d+1} , resulta que el $p - \alpha = d + 1 - \alpha$ del libro citado es nuestro parámetro s , es decir, $\alpha = d + 1 - s$. No obstante, dado que la expresión α -superarmónica está asentada en la literatura, mantendremos esta nomenclatura. Teniendo en cuenta esta relación entre los parámetros, la condición $d - 1 \leq s < d$ bajo la cual vamos a probar el resultado de separación mostrado en el teorema 2.3.1 se traduce en $1 < \alpha \leq 2$.

Dada una medida λ , es posible probar ([Landkof, 1972, Ch. I, §3, Thm. 1.4](#)) que el potencial $U_s^\lambda = U_{d+1-\alpha}^\lambda$ es una función superarmónica si $\alpha \geq 2$ (esto es, si $s \leq d - 1$), mientras que no ocurre así si $\alpha < 2$; de ahí la necesidad de introducir la α -superarmonicidad como generalización de la noción de superarmonicidad. Veamos, pues, la definición:

Definición 2.3.6. Una función $f: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow [0, \infty]$ se dice α -superarmónica, con $0 < \alpha < 2$, si verifica las siguientes condiciones:

- 1) $f(x) \geq 0$ y f no es idénticamente ∞ .

II) f es semicontinua inferiormente en \mathbb{R}^{d+1} .

III) $f(x)$ satisface la condición siguiente:

$$\int_{\|x\|>1} \frac{|f(x)|}{\|x\|^{d+1+\alpha}} dx < \infty.$$

IV) Para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ y para todo $r > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f(x-y) d\varepsilon_\alpha^{(r)}(y) \leq f(x),$$

donde $\varepsilon_\alpha^{(r)}$ es la medida con densidad (con respecto a la medida de Lebesgue) dada por:

$$D_{r,\alpha}(y) := \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\| \leq r, \\ \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}{\pi^{(d+3)/2} (\|y\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y\|^{d+1}} & \text{si } \|y\| > r. \end{cases}$$

Para ilustrar la relación entre esta definición y la de superarmonicidad, recordemos que una función $f: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ se dice superarmónica si no es idénticamente $+\infty$, es semicontinua inferiormente y verifica la siguiente desigualdad:

$$f(x) \geq \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}_r^d)} \int_{\mathbb{S}_r^d} f(x-y) d\mu(y),$$

donde \mathbb{S}_r^d es la esfera de centro 0 y radio r en \mathbb{R}^{d+1} y μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{S}_r^d . Se puede comprobar que cuando $\alpha \rightarrow 2$ la definición de α -superarmonicidad coincide con la de superarmonicidad, pues en ese caso la medida $\varepsilon_\alpha^{(r)}$ converge a μ (en la topología *-débil).

Aunque es posible demostrar que el potencial U_s^λ de una medida cualquiera λ es una función α -superarmónica, en nuestro caso nos bastará con probarlo para el potencial $U_s^{\nu_{\omega_N}^*}$ asociado a la medida de conteo normalizada $\nu_{\omega_N}^*$. Cabe señalar que dicha demostración no está realizada con detalle en ningún sitio que conozcamos, siendo frecuente que en los trabajos donde se cita este resultado se remita al lector al libro de [Landkof \(1972\)](#), donde se omiten numerosos detalles y, cuando no se omiten, se utilizan técnicas que requerirían introducir numerosos conceptos previos.

Lema 2.3.7. Sean $d \geq 2$ y $d-1 < s < d$. Entonces, la función $U_s^{\nu_{\omega_N}^*}(x)$ es α -superarmónica, con $\alpha = d+1-s$.

Demostración. Recordemos la expresión de $U_s^{\nu_{\omega_N}^*}(x)$:

$$U_s^{\nu_{\omega_N}^*}(x) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \omega_N^*} \frac{1}{\|x-y\|^s}, \quad s > 0.$$

Es claro que esta función verifica la condición (I) de la definición, así como también la (II), pues fuera de \mathbb{S}^d es continua y, por la proposición 1.5.4, es semicontinua inferiormente en \mathbb{S}^d . Veamos entonces las dos condiciones restantes.

Para probar que $U_s^{\nu_{\omega_N}^*}(x)$ verifica la condición (III) de la definición, basta demostrar que

$$I = \int_{\|x\|>1} \frac{1}{\|x-y\|^s \|x\|^{2d+2-s}} dx < \infty.$$

Distingamos tres casos:

- $\|y\| < 1$: En este caso, dado que estamos integrando en la región $\|x\| > 1$, existirá una constante $C > 0$ tal que $\|x\| - \|y\| \geq C$, luego

$$\|x - y\|^s \geq (\|x\| - \|y\|)^s \geq C^s, \quad C > 0.$$

Por tanto, en este caso,

$$I \leq \frac{1}{C^s} \int_{\|x\| > 1} \frac{1}{\|x\|^{2d+2-s}} dx.$$

Si realizamos el cambio de variables a coordenadas polares teniendo en cuenta que el integrando sólo depende de la norma de x , por la fórmula (A.0.6) tenemos que

$$I \leq \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^d)}{C^s} \int_1^\infty \frac{r^d}{r^{2d+2-s}} dr = \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^d)}{C^s} \int_1^\infty r^{-d-2+s} dr < \infty,$$

pues $-d-2+s < -1$ y la integral $\int_1^\infty r^p dr$ converge si y sólo si $p < -1$.

- $\|y\| > 1$: Para la prueba de este caso dividiremos la región de integración $\|x\| > 1$ en dos regiones R_1 y R_2 , definidas como

$$R_1 := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : 1 < \|x\| < 2\|y\|\}, \quad R_2 := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| \geq 2\|y\|\}.$$

A su vez, dividiremos la región R_1 en dos subregiones: la región $R_{1,1}$ será la bola cerrada de radio $a > 0$ y centro y contenida en la región R_1 , mientras que la región $R_{1,2}$ será el complementario de la región $R_{1,1}$ con respecto a la región R_1 . Es decir,

$$R_{1,1} := \{x \in R_1 : \|x - y\| \leq a\}, \quad R_{1,2} := \{x \in R_1 : \|x - y\| > a\}.$$

En la figura 2.2 se muestra un esquema con las diferentes regiones de integración:

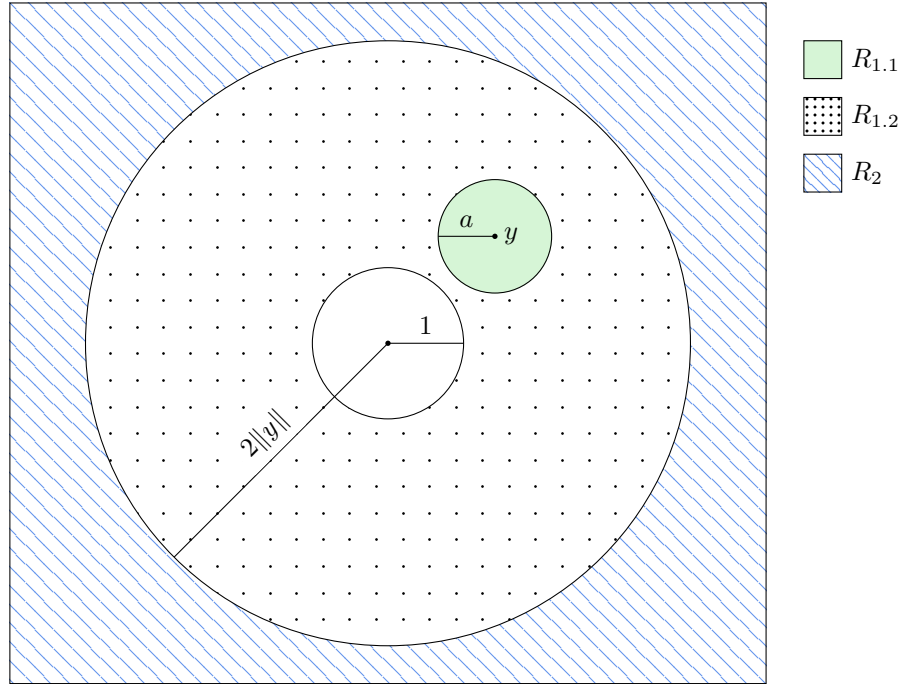


FIGURA 2.2. Representación esquemática de las diferentes regiones de integración en las que hemos dividido la región $\|x\| > 1$.

Tenemos que

$$I_1 = \int_{R_1} \frac{1}{\|x-y\|^s \|x\|^{2d+2-s}} dx \leq \int_{R_1} \frac{1}{\|x-y\|^s} dx = I_{1,1} + I_{1,2},$$

donde, utilizando la fórmula (A.0.6),

$$I_{1,1} = \int_{R_{1,1}} \frac{1}{\|x-y\|^s} dx = \int_{\|z\| \leq a} \frac{1}{\|z\|^s} dz = \text{vol}(\mathbb{S}^d) \int_0^a r^{d-s} dr < \infty,$$

pues $d-s > -1$ y la integral $\int_0^1 r^p dr$ converge si y sólo si $p > -1$, y

$$I_{1,2} = \int_{R_{1,2}} \frac{1}{\|x-y\|^s} dx < \frac{1}{a^s} \int_{R_{1,2}} dx < \infty,$$

pues es el volumen de una región acotada. Por tanto, tenemos que $I_1 < \infty$. Veamos entonces cómo es I_2 :

$$I_2 = \int_{R_2} \frac{1}{\|x-y\|^s \|x\|^{2d+2-s}} dx.$$

Dado que en esta región $\|y\| \leq \|x\|/2$, tenemos que

$$\|x-y\|^s \geq (\|x\| - \|y\|)^s \geq \left(\|x\| - \frac{\|x\|}{2}\right)^s = \frac{\|x\|^s}{2^s}.$$

Por tanto,

$$I_2 \leq 2^s \int_{R_2} \frac{1}{\|x\|^s \|x\|^{2d+2-s}} dx = 2^s \int_{R_2} \frac{1}{\|x\|^{2d+2}} dx = 2^s \text{vol}(\mathbb{S}^d) \int_{2\|y\|}^\infty r^{-d-2} dr < \infty,$$

pues $-d-2 < -1$.

- $\|y\| = 1$: Finalmente, en este caso, dado que el integrando es positivo, basta probar que

$$\int_{\|x\| > 1/2} \frac{1}{\|x-y\|^s \|x\|^{2d+2-s}} dx < \infty,$$

para lo cual basta seguir un procedimiento similar al empleado en la prueba del caso $\|y\| > 1$.

Veamos, por último, que $U_s^{\nu_{\omega_N}^*}$ verifica la condición (IV) de la definición. Para ello, basta probar que para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ y para todo $r > 0$, se cumple que

$$\int_{\|y\| > r} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}{\|x-y-z\|^s \pi^{(d+3)/2} (\|y\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y\|^{d+1}} dy \leq \frac{1}{\|x-z\|^s}, \quad \forall z \in \mathbb{S}^d.$$

Llamando $w = x - z$, podemos reescribir la condición anterior como

$$(2.3.14) \quad \int_{\|y\| > r} \frac{\|w\|^s}{\|w-y\|^s (\|y\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y\|^{d+1}} dy \leq \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Distinguiremos dos casos: $\|w\| \leq r$ y $\|w\| > r$. El primero de ellos lo realizaremos con todo detalle, mientras que en el segundo daremos las ideas fundamentales de la prueba.

- $\|w\| \leq r$: Consideremos el cambio de variables a coordenadas polares dado por el difeomorfismo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{S}^d \times (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \\ (p, t) &\longmapsto y = tp. \end{aligned}$$

Como vimos en el teorema A.0.7, el jacobiano de este cambio de variables es t^d . Por tanto, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\int_r^\infty \frac{t^d}{t^{d+1}(t^2 - r^2)^{\alpha/2}} \int_{p \in \mathbb{S}^d} \frac{\|w\|^s}{\|w - tp\|^s} dp dt \leq \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Dado que t es un escalar no nulo, podemos dividir por t el numerador y el denominador en la integral sobre \mathbb{S}^d ; así, obtenemos la condición

$$\int_r^\infty \frac{1}{t(t^2 - r^2)^{\alpha/2}} \left\| \frac{w}{t} \right\|^s \int_{p \in \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|w/t - p\|^s} dp dt \leq \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Llamemos $\tilde{q} = w/t \in \mathbb{R}^{d+1}$ y $p = (p_1, \tilde{p})$, con $\tilde{p} \in \mathbb{R}^d$. Puede comprobarse fácilmente que, por simetría, la integral anterior sólo depende de la norma de q . Por tanto, podemos tomar $\tilde{q} = (q, 0)$, con $q \in \mathbb{R}$. Si analizamos por un momento la parte de la integral sobre \mathbb{S}^d tenemos, por las consideraciones anteriores, que

$$\begin{aligned} \int_{p \in \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|q - p\|^s} dp &= \int_{p \in \mathbb{S}^d} \frac{1}{((q - p_1)^2 + \|\tilde{p}\|^2)^{s/2}} dp \\ &= \int_{p \in \mathbb{S}^d} \frac{1}{((q - p_1)^2 + (1 - p_1^2))^{s/2}} dp. \end{aligned}$$

Como vemos, esta integral sólo depende de la coordenada p_1 . Por tanto, por el lema 1.4.1,

$$\begin{aligned} \int_{p \in \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|q - p\|^s} dp &= \text{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((q - \xi)^2 + (1 - \xi^2))^{s/2}} d\xi \\ &= 2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w/t\| - \xi)^2 + (1 - \xi^2))^{s/2}} d\xi. \end{aligned}$$

Llevando esto a la integral original, tenemos que la condición que queremos probar es

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{1}{t(t^2 - r^2)^{\alpha/2}} \left\| \frac{w}{t} \right\|^s \cdot 2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w/t\| - \xi)^2 + (1 - \xi^2))^{s/2}} d\xi dt \\ \leq \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_r^\infty \frac{1}{t(t^2 - r^2)^{\alpha/2}} \left\| \frac{w}{t} \right\|^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w/t\| - \xi)^2 + (1 - \xi^2))^{s/2}} d\xi dt \leq \frac{\pi^{3/2} \Gamma(\frac{d}{2})}{2 \Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Por la fórmula de duplicación para la función gamma (1.3.3), tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) = \frac{2^{1-d} \sqrt{\pi} \Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Llevando esto a la expresión anterior, obtenemos la condición

$$\int_r^\infty \frac{1}{t(t^2 - r^2)^{\alpha/2}} \left\| \frac{w}{t} \right\|^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w/t\| - \xi)^2 + (1 - \xi^2))^{s/2}} d\xi dt \leq \frac{\pi \Gamma(\frac{d}{2})^2 \cdot 2^{d-2}}{\Gamma(d) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Si hacemos el cambio de variable $t = ur$, podemos reescribir la integral anterior como

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \frac{r}{ur(u^2 r^2 - r^2)^{\alpha/2}} \|w\|^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w\| - ur\xi)^2 + (1 - \xi^2)u^2 r^2)^{s/2}} d\xi du \\ &= \frac{1}{r^\alpha} \int_1^\infty \frac{1}{u(u^2 - 1)^{\alpha/2}} \|w\|^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w\| - ur\xi)^2 + (1 - \xi^2)u^2 r^2)^{s/2}} d\xi du, \end{aligned}$$

con lo que la condición que queremos verificar es

$$\int_1^\infty \frac{1}{u(u^2 - 1)^{\alpha/2}} \|w\|^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\|w\| - ur\xi)^2 + (1 - \xi^2)u^2 r^2)^{s/2}} d\xi du \leq \frac{\pi \Gamma(\frac{d}{2})^2 \cdot 2^{d-2}}{\Gamma(d) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}.$$

Llamemos $\lambda = \|w\|/r$. Reescribiendo la integral anterior con esta nueva notación, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \frac{1}{u(u^2 - 1)^{\alpha/2}} \lambda^s r^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\lambda r - ur\xi)^2 + (1 - \xi^2)u^2 r^2)^{s/2}} d\xi du \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{u(u^2 - 1)^{\alpha/2}} \lambda^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{((\lambda - u\xi)^2 + (1 - \xi^2)u^2)^{s/2}} d\xi du \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{u(u^2 - 1)^{\alpha/2}} \lambda^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{(\lambda^2 + u^2 - 2\lambda u\xi)^{s/2}} d\xi du. \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $u = 1/v$, la integral anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{v}{v^2(1/v^2 - 1)^{\alpha/2}} \lambda^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{(\lambda^2 + 1/v^2 - 2\lambda(1/v)\xi)^{s/2}} d\xi dv \\ &= \int_0^1 v^{\alpha-1} (1 - v^2)^{-\alpha/2} \lambda^s v^s \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{(\lambda^2 v^2 + 1 - 2\lambda v\xi)^{s/2}} d\xi dv \\ &= \lambda^s \int_0^1 v^d (1 - v^2)^{-\alpha/2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{(\lambda^2 v^2 + 1 - 2\lambda v\xi)^{s/2}} d\xi dv, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\alpha - 1 + s = d + 1 - s - 1 + s = d$. Resolvamos ahora la integral siguiente:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - \xi^2)^{d/2-1}}{(\lambda^2 v^2 + 1 - 2\lambda v\xi)^{s/2}} d\xi.$$

Consideremos el cambio de variable $\xi = 2\zeta - 1$. Bajo esta transformación, la integral anterior tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & 2^{d-1} \int_0^1 \zeta^{d/2-1} (1 - \zeta)^{d/2-1} ((\lambda v + 1)^2 - 4\lambda v\zeta)^{-s/2} d\zeta \\ &= 2^{d-1} (\lambda v + 1)^{-s} \int_0^1 \zeta^{d/2-1} (1 - \zeta)^{d/2-1} \left(1 - \frac{4\lambda v\zeta}{(\lambda v + 1)^2}\right)^{-s/2} d\zeta \end{aligned}$$

$$= 2^{d-1}(\lambda v + 1)^{-s} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})^2}{\Gamma(d)} \cdot {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4\lambda v}{(\lambda v + 1)^2}\right),$$

donde hemos utilizado la representación integral de la función hipergeométrica mostrada en (1.3.9). Notemos que esta última función hipergeométrica está bien definida, pues $4\lambda v/(\lambda v + 1)^2$ es siempre menor o igual que 1 —independientemente del valor de λ —, y si $4\lambda v/(\lambda v + 1)^2 = 1$ la serie correspondiente converge (véase la proposición 1.3.8). Por tanto, la condición que ha de cumplirse se puede escribir como sigue:

$$(2.3.15) \quad \lambda^s \int_0^1 v^d (1 - v^2)^{-\alpha/2} (\lambda v + 1)^{-s} \cdot {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4\lambda v}{(\lambda v + 1)^2}\right) dv \leq \frac{\pi}{2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}.$$

Consideremos la siguiente transformación cuadrática para la función hipergeométrica (Gradshteyn y Ryzhik, 2007, 9.134-3):

$$(1 + z)^{-2a} {}_2F_1\left(a, b; 2b; \frac{4z}{(1 + z)^2}\right) = {}_2F_1\left(a, a + \frac{1}{2} - b; b + \frac{1}{2}; z^2\right).$$

Utilizando esta transformación, tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda v + 1)^{-s} \cdot {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{d}{2}; d; \frac{4\lambda v}{(\lambda v + 1)^2}\right) &= {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + \frac{1}{2} - \frac{d}{2}; \frac{d+1}{2}; \lambda^2 v^2\right) \\ &= {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1-d}{2}; \frac{d+1}{2}; \lambda^2 v^2\right). \end{aligned}$$

Para justificar que esta función hipergeométrica está bien definida, recordemos que estamos en el caso $\|w\| \leq r$,³ esto es, $0 \leq \lambda \leq 1$. Por tanto, tenemos que $\lambda^2 v^2 \leq 1$, y, si $\lambda^2 v^2 = 1$, dado que

$$\frac{d+1}{2} - \frac{s}{2} - \frac{s+1-d}{2} = d - s > 0,$$

la serie correspondiente converge. Entonces, podemos reescribir la integral en (2.3.15) como sigue:

$$\lambda^s \int_0^1 v^d (1 - v^2)^{-\alpha/2} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1-d}{2}; \frac{d+1}{2}; \lambda^2 v^2\right) dv.$$

Esta expresión es claramente creciente con λ , luego basta analizar lo que ocurre para $\lambda = 1$. En ese caso, la integral resultante es

$$\int_0^1 v^d (1 - v^2)^{-\alpha/2} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1-d}{2}; \frac{d+1}{2}; v^2\right) dv.$$

Si realizamos el cambio de variables $v = \theta^{1/2}$, la integral anterior se convierte en

$$(2.3.16) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{(d-1)/2} (1 - \theta)^{-\alpha/2} {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s+1-d}{2}; \frac{d+1}{2}; \theta\right) d\theta.$$

Para resolver esta integral podemos utilizar la fórmula siguiente (Gradshteyn y Ryzhik, 2007, 7.512-4):

$$\int_0^1 z^{c-1} (1 - z)^{p-1} {}_2F_1(a, b; c; z) dz = \frac{\Gamma(c)\Gamma(p)\Gamma(c+p-a-b)}{\Gamma(c+p-a)\Gamma(c+p-b)},$$

³Este es el único punto de la demostración en el que utilizamos que $\|w\| \leq r$.

válida siempre y cuando c , p y $c + p - a - b$ sean mayores que 0. En nuestro caso tenemos $a = s/2$, $b = p = (s + 1 - d)/2$ y $c = (d + 1)/2$; dado que, por hipótesis, $d - 1 < s < d$, se verifican las condiciones bajo las cuales podemos aplicar esta fórmula. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{(d-1)/2} (1-\theta)^{-\alpha/2} {}_2F_1 \left(\frac{s}{2}, \frac{s+1-d}{2}; \frac{d+1}{2}; \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \Gamma(\frac{s+1-d}{2}) \Gamma(\frac{d+1-s}{2})}{\Gamma(1) \Gamma(\frac{d+1}{2})} = \frac{1}{2} \Gamma \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2 \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la fórmula de reflexión para la función gamma (1.3.2). Por tanto, dado que para $\lambda \leq 1$ el miembro de la izquierda en (2.3.15) es creciente y hemos probado que para $\lambda = 1$ se alcanza la cota, queda demostrado que si $\lambda \leq 1$, es decir, si $\|w\| \leq r$, se satisface la condición (iv) de la definición.

- $\|w\| > r$: En este caso es posible probar que la integral (2.3.14) es constante e igual a la cota, es decir,

$$\int_{\|y\| > r} \frac{\|w\|^s}{\|w - y\|^s (\|y\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y\|^{d+1}} dy = \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Las técnicas utilizadas en la prueba de este caso difieren notablemente de las empleadas en el caso anterior. Por tanto, en lugar de realizar el desarrollo con detalle, lo cual conllevaría introducir previamente numerosos conceptos nuevos, comentaremos brevemente el procedimiento seguido por Landkof (1972).

Dado un punto $y_0 \in \mathbb{R}^{d+1}$, podemos considerar la inversión con centro en y_0 , que envía cada punto $y \neq y_0$ al punto y^* situado en la semirrecta que une y_0 e y y tal que

$$\|y - y_0\| \cdot \|y^* - y_0\| = 1.$$

Esta aplicación es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{y_0\}$ en sí mismo. Entonces, dada una medida ν , podemos construir una nueva medida ν^* dada por⁴

$$d\nu^*(y^*) = \|y - y_0\|^{-s} d\nu(y), \quad 0 < s < d + 1,$$

denominada *transformada de Kelvin* con centro y_0 de la medida ν . Además, se tiene la siguiente relación entre los potenciales de las medidas ν y ν^* (Landkof, 1972, Eq. (4.5.4)):

$$\begin{aligned} (2.3.17) \quad U_s^{\nu^*}(x^*) &= \int_{\text{supp}(\nu^*)} \frac{1}{\|x^* - y^*\|^s} d\nu^*(y^*) = \int_{\text{supp}(\nu)} \frac{\|y_0 - x\|^s}{\|x - y\|^s} d\nu(y) \\ &= \|y_0 - x\|^s U_s^\nu(x). \end{aligned}$$

Así, si le aplicamos la transformación de Kelvin con centro 0 a la medida con densidad

$$\lambda(y) = \begin{cases} (r^2 - \|y\|^2)^{-\alpha/2} & \text{si } \|y\| < r, \\ 0 & \text{si } \|y\| \geq r, \end{cases}$$

⁴Véase [Landkof, 1972, Ch. IV, §5] para más información sobre estas transformaciones y las condiciones bajo las cuales se pueden realizar.

y reemplazamos r por r^{-1} , obtenemos una nueva medida λ^* con densidad

$$\lambda^*(y^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y^*\| \leq r, \\ r^\alpha (\|y^*\|^2 - r^2)^{-\alpha/2} \|y^*\|^{-(d+1)} & \text{si } \|y^*\| > r. \end{cases}$$

Entonces, haciendo uso de la expresión (2.3.17) tenemos que

$$\begin{aligned} U_s^{\lambda^*}(x^*) &= \int_{\|y^*\| > r} \frac{r^\alpha}{(\|y^*\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y^*\|^{d+1} \|x^* - y^*\|^s} dy^* = \|x\|^s U_s^\lambda(x) \\ &= \|x\|^s \int_{\|y\| < r} \frac{1}{(r^2 - \|y\|^2)^{\alpha/2} \|x - y\|^s} dy. \end{aligned}$$

Es decir, teniendo en cuenta que $\|x\| = \|x^*\|^{-1}$,

$$\int_{\|y^*\| > r} \frac{\|x^*\| r^\alpha}{(\|y^*\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y^*\|^{d+1} \|x^* - y^*\|^s} dy^* = \int_{\|y\| < r} \frac{1}{(r^2 - \|y\|^2)^{\alpha/2} \|x - y\|^s} dy.$$

En el apéndice 1 del libro de Landkof (1972) se prueba, para $\|x\| \leq r$ (es decir, para $\|x^*\| \geq r$), que

$$\int_{\|y\| \leq r} \frac{1}{(r^2 - \|y\|^2)^{\alpha/2} \|x - y\|^s} dy = \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})},$$

con lo que concluimos que

$$\int_{\|y^*\| > r} \frac{\|x^*\|^s}{(\|y^*\|^2 - r^2)^{\alpha/2} \|y^*\|^{d+1} \|x^* - y^*\|^s} dy^* = \frac{\pi^{(d+3)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) r^\alpha}.$$

Renombrando $y = y^*$ y $w = x^*$, obtenemos la igualdad buscada. \square

A continuación enunciamos dos principios de dominación para funciones superarmónicas y α -superarmónicas que nos permitirán extender el lema 2.3.5 a la esfera de radio $1 + N^{-1/d}$.

Teorema 2.3.8 (Landkof, 1972, Thm. 1.27). *Sea λ una medida boreliana σ -finita con soporte un subconjunto compacto de \mathbb{R}^{d+1} y con energía finita, y sea $f(x)$ una función no negativa y superarmónica en \mathbb{R}^{d+1} . Entonces, si la desigualdad*

$$U_{d-1}^\lambda(x) \leq f(x)$$

es válida en λ -casi todo punto, entonces es válida en todo \mathbb{R}^{d+1} .

Teorema 2.3.9 (Landkof, 1972, Thm. 1.29). *Sea λ una medida boreliana σ -finita con soporte un subconjunto compacto de \mathbb{R}^{d+1} cuyo potencial U_s^λ , con $d-1 < s < d$, es finito en λ -casi todo punto y sea $f(x)$ una función α -superarmónica, con $\alpha = d+1-s$. Si la desigualdad*

$$U_s^\lambda(x) \leq f(x)$$

es válida en λ -casi todo punto, entonces es válida en todo \mathbb{R}^{d+1} .

Lema 2.3.10. *Sea $d-1 \leq s < d$. Entonces, existen una constante $\theta = \theta(s, d) > 0$ y un entero positivo M tales que para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ con $\|x\| = 1 + N^{-1/d}$ y para cualquier configuración ω_N^* que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d , se tiene que*

$$U_s^{\nu_{\omega_N^*}}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \theta N^{-1+s/d}, \quad N \geq M.$$

Demostración. Por el lema 2.3.5, existe una constante $c > 0$ tal que

$$(2.3.18) \quad U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - cN^{-1+s/d}, \quad x \in \mathbb{S}^d.$$

Dado que el potencial $U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x)$ es constante en \mathbb{S}^d , tenemos que $U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ para todo $x \in \mathbb{S}^d$, con lo que podemos reescribir (2.3.18) como

$$(2.3.19) \quad U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} \left(1 - \tilde{C}N^{-1+s/d}\right) = U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) \left(1 - \tilde{C}N^{-1+s/d}\right), \quad x \in \mathbb{S}^d,$$

donde $\tilde{C} = c/V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$. Es claro que esta desigualdad se satisface en $\mu_{\mathbb{S}^d}$ -casi todo punto en \mathbb{R}^{d+1} , pues se satisface en \mathbb{S}^d y podemos extender la medida $\mu_{\mathbb{S}^d}$ al resto de \mathbb{R}^{d+1} de forma que $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \mathbb{S}^d$ tenga medida cero. Recordemos, además, que la función $f(x) := U_s^{\nu\omega_N^*}$ es superarmónica si $s = d - 1$ y α -superarmónica, con $\alpha = d + 1 - s$, si $d - 1 < s < d$. Por tanto, dado que la medida $\mu_{\mathbb{S}^d}$ verifica las condiciones de los teoremas 2.3.8 y 2.3.9, tenemos que la desigualdad (2.3.19) es válida en todo \mathbb{R}^{d+1} , es decir,

$$U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) \left(1 - \tilde{C}N^{-1+s/d}\right), \quad x \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Entonces, por el lema 2.3.3 tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, con $\|x\| = 1 + N^{-1+s/d}$, existen un entero positivo M y una constante $C = C(s, d) > 0$ tales que

$$(2.3.20) \quad U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq \left(V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - CN^{-1+s/d}\right) \left(1 - \tilde{C}N^{-1+s/d}\right), \quad N \geq M.$$

Para completar la prueba del lema necesitamos probar que existe una constante $\theta = \theta(s, d) > 0$ tal que

$$U_s^{\nu\omega_N^*}(x) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \theta N^{-1+s/d}, \quad N \geq M.$$

Veamos entonces qué condición ha de cumplir la constante θ . Comparando la desigualdad anterior con la expresión (2.3.20), tenemos que

$$\begin{aligned} & \left(V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - CN^{-1+s/d}\right) \left(1 - \tilde{C}N^{-1+s/d}\right) \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \theta N^{-1+s/d} \\ \iff & V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} \tilde{C}N^{-1+s/d} - CN^{-1+s/d} + C\tilde{C} \left(N^{-1+s/d}\right)^2 \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \theta N^{-1+s/d} \\ \iff & \theta \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} \tilde{C} + C - C\tilde{C}N^{-1+s/d}, \end{aligned}$$

luego podemos tomar como θ cualquier constante mayor que $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} \tilde{C} + C$. Esto completa la prueba. \square

El siguiente lema nos proporciona una útil desigualdad que relaciona la energía continua $V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}$ de la esfera con una cantidad que involucra la distancia entre los puntos de una configuración minimizante ω_N^* .

Lema 2.3.11. *Si $0 < s < d$ y $\omega_N^* = \{x_1, \dots, x_N\}$ es una configuración que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d , entonces*

$$\frac{1}{N-1} \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s} \leq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Demostración. En primer lugar, notemos que si $K: \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es un núcleo simétrico y semicontinuo inferiormente y $\omega_N^* = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{S}^d$ es una configuración que minimiza la K -energía de N -puntos, entonces, para cada $i = 1, \dots, N$,

$$(2.3.21) \quad \sum_{j:j \neq i} K(x_i, x_j) \leq \sum_{j:j \neq i} K(x, x_j), \quad x \in \mathbb{S}^d.$$

Esto se debe simplemente a que, si existiese un punto $x' \in \mathbb{S}^d$ tal que se violase (2.3.21) para algún índice i' , la configuración $\bigcup_{j:j \neq i'}^N \{x_j\} \cup \{x'\}$ tendría una energía estrictamente menor, con lo que ω_N^* no sería una configuración minimizante. Entonces, aplicando la desigualdad (2.3.21) al núcleo de Riesz $K_s = \|x - y\|^{-s}$, tenemos que

$$\sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s} \leq \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x - x_j\|^s}.$$

Si integramos esta desigualdad en \mathbb{S}^d con respecto a la medida $\mu_{\mathbb{S}^d}(x)$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{S}^d} \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s} d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) \leq \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x - x_j\|^s} d\mu_{\mathbb{S}^d}(x),$$

de donde, teniendo en cuenta que el integrando del miembro de la izquierda no depende de x y que en el miembro de la derecha tenemos la integral de una suma finita, que es la suma de las integrales, concluimos que

$$\sum_{j:j \neq i} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s} \leq \sum_{j:j \neq i} \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|x - x_j\|^s} d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) = \sum_{j:j \neq i} U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x) = \sum_{j:j \neq i} V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} = (N-1)V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}},$$

donde en la penúltima igualdad hemos hecho uso de que el potencial $U_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}}(x)$ toma un valor constante en \mathbb{S}^d para todo $x \in \mathbb{S}^d$. \square

Llegados a este punto, disponemos ya prácticamente de todos los resultados previos necesarios para probar de forma sencilla el teorema 2.3.1. No obstante, antes de abordar dicho teorema necesitaremos demostrar un último resultado sobre conjuntos convexos, para cuya demostración necesitaremos el siguiente resultado bien conocido:

Teorema 2.3.12 (Teorema de Weierstrass). *Sea $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un conjunto compacto no vacío y sea $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f alcanza su máximo y su mínimo en K , es decir, existen $x_1, x_2 \in K$ tales que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

para todo $x \in K$.

Lema 2.3.13 (Borodachov, Hardin y Saff, 2019, Prop. A.1.1). *Sea $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ existe un único punto $y_x \in K$ que es el más cercano a x . Además, para todo $z \in K$ se tiene que $\|y_x - z\| \leq \|x - z\|$, y se da la igualdad si y sólo si $x \in K$.*

Demostración. Probemos en primer lugar la existencia. Sea $\tilde{K} = K \cap \overline{\mathbb{B}}(x, \text{dist}(x, K) + 1)$, donde $\overline{\mathbb{B}}(x, \text{dist}(x, K) + 1)$ es la bola cerrada de centro x y radio $\text{dist}(x, K) + 1$, y $\text{dist}(x, K)$ es la distancia de x al conjunto K , definida como

$$\text{dist}(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

Es claro que \tilde{K} es no vacío. Dado que tanto K como $\overline{\mathbb{B}}(x, \text{dist}(x, K) + 1)$ son cerrados, tenemos que \tilde{K} es cerrado; además, por ser $\overline{\mathbb{B}}(x, \text{dist}(x, K) + 1)$ acotado tenemos que \tilde{K} es acotado. Por tanto, \tilde{K} es cerrado y acotado en \mathbb{R}^{d+1} , luego, por el teorema de Heine–Borel, es compacto. Consideremos entonces la función $f: \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(y) = \|x - y\|$. Dado que f es una función continua en un compacto, por el teorema 2.3.12 concluimos que existe un

punto $y_x \in \tilde{K}$ en el cual f alcanza su valor mínimo. Puesto que, por cómo hemos construido \tilde{K} , los puntos de $K \setminus \tilde{K}$ están a una distancia de x mayor que $\|x - y_x\|$, concluimos que y_x es el punto de K más cercano a x . Veamos ahora que y_x es único. Por reducción al absurdo, supongamos que existen dos puntos $y_1, y_2 \in K$ que son los más próximos a x . Entonces, la altura $[x, u]$ del triángulo isósceles $\triangle y_1 x y_2$ es estrictamente menor que la distancia de x a y_1 e y_2 . Sin embargo, como K es convexo y $u \in [y_1, y_2]$, entonces $u \in K$ y sería más próximo a x que y_1 e y_2 , lo que es absurdo. Por tanto, y_x es único.

Probemos ahora la desigualdad del lema. Si $x \in K$, entonces $y_x = x$, con lo que $\|y_x - x\| = \|x - z\|$. Supongamos que $x \notin K$. Si $z = y_x$, entonces $\|y_x - z\| = 0 < \|x - z\|$. Supongamos entonces que $z \neq y_x$. Si x, y_x y z fuesen colineales, entonces y_x se encontraría estrictamente contenido en el segmento $[x, z]$, con lo que $\|y_x - z\| < \|x - z\|$. Supongamos, pues, que dichos puntos no están alineados. Consideremos el triángulo $\triangle x y_x z$ y denotemos $[x, z^*]$ la altura de dicho triángulo desde el punto x . El punto z^* se encontrará en la recta determinada por los puntos y_x y z , luego hay tres posibilidades:

- I) $z^* \in (y_x, z]$: Dado que K es convexo, tendríamos que $z^* \in K$ y sería más próximo a x que y_x , luego este caso no puede darse.
- II) $z \in (y_x, z^*]$: En este caso tendríamos que z es más próximo a x que y_x , luego tampoco es posible.
- III) $y_x \in (z, z^*]$: Dado que las dos opciones anteriores han quedado descartadas, ésta es necesariamente la correcta. Por tanto, tenemos que el ángulo interior en el vértice y_x ha de ser al menos $\pi/2$, con lo que el lado $[x, z]$ es el más largo. Es decir, $\|y_x - x\| < \|x - z\|$. Además, por lo dicho hasta ahora es claro que la igualdad se da si y sólo si $x \in K$. \square

Llegamos, al fin, a la prueba del resultado de separación mostrado en el teorema 2.3.1, que recordamos a continuación:

Teorema 2.3.1. *Si $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ y $d - 1 \leq s < d$, existe una constante $\lambda_{s,d} > 0$ tal que para todo $N \geq 2$ la distancia de separación de cualquier configuración ω_N^* que minimiza la s -energía en \mathbb{S}^d satisface que*

$$\delta(\omega_N^*) \geq \frac{\lambda_{s,d}}{N^{1/d}}.$$

Demostración. Denotemos $\omega_N^* = \{x_1, \dots, x_N\}$. Sean $k, \ell \in \{1, \dots, N\}$ tales que $\|x_k - x_\ell\| = \delta(\omega_N^*)$, y llamemos $y := (1 + N^{-1/d})x_k$. Así definido, no es difícil ver que x_k es el punto de $\overline{\mathbb{B}}$ más cercano a y , donde $\overline{\mathbb{B}}$ es la bola unidad cerrada. Para verlo, tenemos, por un lado, que

$$\begin{aligned} \|y - x_k\| &= \|(1 + N^{-1/d})x_k - x_k\| = \|(1 + N^{-1/d} - 1)x_k\| = \|N^{-1/d}x_k\| \\ &= N^{-1/d}\|x_k\| = N^{-1/d}, \end{aligned}$$

pues $\|x_k\| = 1$, ya que $x_k \in \mathbb{S}^d$. Por otro lado, para cualquier otro punto $x \in \mathbb{S}^d$ distinto de x_k se tiene que

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \|(1 + N^{-1/d})x_k - x\| \geq \left| \|(1 + N^{-1/d})x_k\| - \|x\| \right| = \left| (1 + N^{-1/d})\|x_k\| - \|x\| \right| \\ &= |1 + N^{-1/d} - 1| = N^{-1/d} = \|y - x_k\|. \end{aligned}$$

Así pues, dado que la bola cerrada $\overline{\mathbb{B}}$ es un conjunto cerrado y convexo, y x_k es el punto de $\overline{\mathbb{B}}$ más cercano a y , podemos aplicar el lema 2.3.13 a x_k y a y tomando $K = \overline{\mathbb{B}}$, de

donde tenemos que $\|x_k - z\| \leq \|y - z\|$ para todo $z \in \overline{\mathbb{B}}$. En particular, tendremos que $\|x_k - x_j\| \leq \|y - x_j\|$ para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Entonces, por el lema 2.3.11, tenemos que

$$\begin{aligned} V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{1}{N\delta(\omega_N^*)^s} &\geq \frac{1}{N-1} \sum_{j:j \neq k} \frac{1}{\|x_k - x_j\|^s} - \frac{1}{N\|x_k - x_\ell\|^s} \\ &\geq \frac{1}{N} \left(\sum_{j:j \neq k} \frac{1}{\|x_k - x_j\|^s} - \frac{1}{\|x_k - x_\ell\|^s} \right) = \frac{1}{N} \sum_{j:j \neq k, \ell} \frac{1}{\|x_k - x_j\|^s} \\ &\geq \frac{1}{N} \sum_{j:j \neq k, \ell} \frac{1}{\|y - x_j\|^s} = U_s^{\nu_{\omega_N^*}}(y) - \frac{1}{N\|y - x_k\|^s} - \frac{1}{N\|y - x_\ell\|^s}. \end{aligned}$$

Dado que, como hemos visto arriba, $N^{-1/d} = \|y - x_k\| \leq \|y - x_\ell\|$, tendremos que

$$V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{1}{N\delta(\omega_N^*)^s} \geq U_s^{\nu_{\omega_N^*}}(y) - 2N^{-1+s/d}.$$

Como $\|y\| = 1 + N^{-1/d}$, por el lema 2.3.10 existirán una constante $\theta = \theta(s, d) > 0$ y un entero positivo M tales que, para todo $N \geq M$,

$$V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \frac{1}{N\delta(\omega_N^*)^s} \geq V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - \theta N^{-1+s/d} - 2N^{-1+s/d} = V_s^{\mu_{\mathbb{S}^d}} - (\theta + 2)N^{-1+s/d}.$$

Así, si despejamos $\delta(\omega_N^*)$ en esta ecuación, obtenemos que

$$\delta(\omega_N^*) \geq (\theta + 2)^{-1/s} N^{-1/d}.$$

Por tanto, podemos tomar $\lambda_{s,d} = (\theta + 2)^{-1/s}$, lo que completa la prueba. \square

Este resultado nos permite concluir el trabajo con una curiosa reflexión. Supongamos que tenemos una configuración $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ de N electrones situados en la esfera \mathbb{S}^2 e interactuando de acuerdo a la ley de Coulomb. Como mencionamos en la introducción, el problema de Thomson consiste en determinar cómo se distribuirían estos electrones en su estado fundamental, es decir, cuáles serían las posiciones exactas de las partículas que minimizan la energía potencial electrostática dada —salvo por una constante— por

$$E_1(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|}.$$

La notación empleada no es casual, pues recordemos que éste no es sino el caso $d = 2$, $s = 1$ de la energía de Riesz. Sabemos que el problema de Thomson es muy difícil y que resolverlo para cualquier valor de N es considerado por muchos una tarea imposible. Sin embargo, el teorema 2.3.1 nos dice que, aunque no sepamos encontrar las posiciones exactas de los N electrones que minimizan la energía potencial electrostática en \mathbb{S}^2 , sí sabemos que dichos electrones estarán bien separados.

APÉNDICE A

La fórmula de la coárea

Dedicaremos este apéndice a introducir brevemente la fórmula de la coárea, una poderosa herramienta que generaliza el teorema de Fubini y el teorema de cambio de variables simultáneamente. La versión más general de dicha fórmula puede consultarse en el libro de [Federer \(1969\)](#), aunque para nosotros será más que suficiente con una versión simplificada como la que puede encontrarse en el artículo de [Beltrán \(2009\)](#) o en la sección 13.2 del libro de [Blum, Cucker, Shub y Smale \(1998\)](#). Asimismo, el lector interesado en un tratamiento detallado de la fórmula de la coárea puede encontrarlo en [\[Lainz, 2017\]](#).

Recordemos que una variedad riemanniana es una variedad diferenciable¹ dotada de un producto interno en el espacio tangente de cada punto que varía diferenciablemente con el punto. Dada una aplicación diferenciable $\varphi: M \rightarrow N$, denotaremos la aplicación diferencial correspondiente como $D_x\varphi: T_xM \rightarrow T_{\varphi(x)}N$, donde T_xM es el espacio tangente a M en el punto x y $T_{\varphi(x)}N$ es el espacio tangente a N en el punto $\varphi(x)$. A continuación definimos el concepto de jacobiano normal, que generaliza la noción de jacobiano.

Definición A.0.1. Sean M y N dos variedades riemannianas de dimensión m y n , respectivamente, y sea $\varphi: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Para cada punto $x \in M$ tal que la aplicación diferencial $D_x\varphi$ es suprayectiva, sea $\{v_1^x, \dots, v_n^x\}$ una base ortonormal de $(\ker(D_x\varphi))^\perp$. Entonces, definimos el *jacobiano normal* de φ en el punto x , denotado $\text{NJac}_x\varphi$, como el volumen en el espacio tangente $T_{\varphi(x)}N$ del paralelepípedo definido por los vectores $D_x\varphi(v_1^x), \dots, D_x\varphi(v_n^x)$. En caso de que $\varphi(x)$ no sea suprayectiva, definimos $\text{NJac}_x\varphi := 0$.

Observación A.0.2. La definición anterior no depende de la base ortonormal escogida.

En el caso particular en que $m = n$, el jacobiano normal es simplemente el determinante de la matriz jacobiana de φ en x . Dado que, en este caso, el requisito de que la diferencial sea suprayectiva implica automáticamente que es también inyectiva, tenemos que $\ker(D_x\varphi) = \{0\}$ y $(\ker(D_x\varphi))^\perp = T_xM$. Por tanto, para calcular el jacobiano normal basta elegir una base ortonormal de T_xM y calcular su imagen por $D_x\varphi$. Además, eligiendo la base de forma adecuada podemos conseguir que su imagen forme una base ortogonal, con lo que el jacobiano normal vendrá dado por el producto de las normas de los vectores de la base imagen.

Teorema A.0.3 (Fórmula de la coárea). *Sean M y N dos variedades riemannianas de dimensión m y n , respectivamente, con $m \geq n$. Sea $\varphi: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, suprayectiva y tal que la aplicación diferencial $D_x\varphi$ es suprayectiva para casi todo $x \in M$.*

¹Para nosotros, *diferenciable* significará siempre *de clase \mathcal{C}^∞* , tanto en el caso de variedades como de aplicaciones entre variedades.

Sean $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces, se verifican las siguientes igualdades:

$$(A.0.1) \quad \int_{x \in M} f(x) \text{NJac}_x \varphi \, dx = \int_{y \in N} \int_{x \in \varphi^{-1}(y)} f(x) \, dx \, dy,$$

$$(A.0.2) \quad \int_{x \in M} (g \circ \varphi)(x) \text{NJac}_x \varphi \, dx = \int_{y \in N} g(y) \text{vol}(\varphi^{-1}(y)) \, dy.$$

Para justificar que la integral sobre la fibra $\varphi^{-1}(y)$ en el teorema A.0.3 está bien definida necesitamos recordar el teorema de Morse–Sard, para lo cual es preciso tener presentes las siguientes definiciones:

Definición A.0.4. Sean M y N variedades diferenciables y sea $\varphi: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable.

- i) Un punto $x \in M$ es un *punto regular* si $D_x \varphi$ es suprayectiva. En caso contrario, se dice que el punto x es un *punto singular*.
- ii) Un punto $y \in N$ es un *valor regular* si para todo $x \in \varphi^{-1}(y)$ se tiene que x es un punto regular. En caso contrario, se dice que y es un *valor singular*.

El siguiente teorema, conocido como *teorema de la preimagen* o *teorema del valor regular*, nos dice bajo qué condiciones la fibra $\varphi^{-1}(y)$ es una subvariedad.

Teorema A.0.5. Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensión m y n , respectivamente, y sea $\varphi: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces, si $y \in N$ es un valor regular de φ de fibra no vacía, la fibra $\varphi^{-1}(y)$ es una subvariedad diferenciable de M de dimensión $m - n$.

Teorema A.0.6 (Morse–Sard). Sea $\varphi: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Entonces, el conjunto de valores singulares de φ tiene medida cero en N .

Como consecuencia de este teorema tenemos que el conjunto de valores que pueden ser problemáticos a la hora de definir la integral sobre la fibra en el teorema A.0.3 tiene medida cero, con lo que, como sabemos, podemos despreciarlos a la hora de integrar. Por tanto, la integral sobre $\varphi^{-1}(y)$ en el teorema A.0.3 está bien definida.

Si en el teorema A.0.3 consideramos el caso $m = n$ y suponemos que φ es un difeomorfismo, obtenemos el conocido teorema de cambio de variables, pues en ese caso todos los puntos y todos los valores son regulares, $(\ker(D_x \varphi))^\perp = T_x M$ y las fibras tienen un único punto, con lo que las ecuaciones (A.0.1) y (A.0.2) pueden escribirse como

$$(A.0.3) \quad \int_{x \in M} f(x) \text{NJac}_x \varphi \, dx = \int_{y \in N} (f \circ \varphi^{-1})(y) \, dy,$$

$$(A.0.4) \quad \int_{x \in M} (g \circ \varphi)(x) \text{NJac}_x \varphi \, dx = \int_{y \in N} g(y) \, dy.$$

donde el jacobiano normal es, en este caso, el determinante de la matriz jacobiana.

Coordenadas polares en \mathbb{R}^{d+1} . Una útil aplicación de las fórmulas anteriores es la integración en coordenadas polares:

Teorema A.0.7. Sea $f: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces,

$$(A.0.5) \quad \int_{y \in \mathbb{R}^{d+1}} f(y) dy = \int_{(p,r) \in \mathbb{S}^d \times (0,\infty)} f(rp) r^d d(p,r).$$

Demostración. Consideremos el difeomorfismo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{S}^d \times (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\} \\ (p, r) &\longmapsto rp. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (A.0.4), tenemos que

$$\int_{(p,r) \in \mathbb{S}^d \times (0,\infty)} (f \circ \varphi)(p, r) \text{NJac}_{(p,r)} \varphi d(p, r) = \int_{y \in \mathbb{R}^{d+1}} f(y) dy,$$

es decir,

$$\int_{(p,r) \in \mathbb{S}^d \times (0,\infty)} f(rp) \text{NJac}_{(p,r)} \varphi d(p, r) = \int_{y \in \mathbb{R}^{d+1}} f(y) dy.$$

Por tanto, basta probar que $\text{NJac} \varphi(p, r) = r^d$. Consideremos entonces la aplicación diferencial $D_{(p,r)} \varphi: T_{(p,r)}(\mathbb{S}^d \times (0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$. Sea $\{v_1, \dots, v_{d+1}\}$ una base ortonormal de $T_{(p,r)}(\mathbb{S}^d \times (0, \infty))$, donde $v_i = (\dot{p}_i, 0)$ para $i = 1, \dots, d$, con $\dot{p}_i \in \mathbb{S}^d$, $\langle \dot{p}_i, p \rangle = 0$ para todo i y $\langle \dot{p}_i, \dot{p}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, y $v_{d+1} = e_{d+2} = (0, \dots, 0, 1)$. Calculemos la imagen de los elementos de esta base por la aplicación diferencial:

$$\begin{aligned} D_{(p,r)} \varphi(\dot{p}_i, 0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi((p, r) + t(\dot{p}_i, 0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(p + t\dot{p}_i, r) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r(p + t\dot{p}_i) = r\dot{p}_i. \\ D_{(p,r)} \varphi(e_{d+2}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi((p, r) + te_{d+2}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(p, r + t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((r+t)p) = p. \end{aligned}$$

Dado que cada uno de los \dot{p}_i es ortogonal a p , tenemos que la imagen de la base ortonormal de la que partíamos es una base ortogonal, con lo que el volumen del paralelepípedo que definen es simplemente el producto de sus normas. Por tanto, el jacobiano normal de φ en el punto (p, r) vendrá dado por

$$\text{NJac}_{(p,r)} \varphi = \|p\| \prod_{i=1}^d r \|\dot{p}_i\| = r^d.$$

Por tanto, concluimos que

$$\int_{y \in \mathbb{R}^{d+1}} f(y) dy = \int_{(p,r) \in \mathbb{S}^d \times (0,\infty)} f(rp) r^d d(p, r),$$

como queríamos probar. \square

En el caso de que la función $f(y)$ sólo dependa de la norma $\|y\|$, esto es, $f(y) = f(\|y\|)$, aplicando el teorema de Fubini e integrando en la esfera \mathbb{S}^d tenemos que

$$(A.0.6) \quad \int_{y \in \mathbb{R}^{d+1}} f(\|y\|) dy = \text{vol}(\mathbb{S}^d) \int_0^\infty f(r) r^d dr.$$

APÉNDICE B

Justificación de algunas expresiones asintóticas

En este apéndice presentamos la comprobación explícita de algunas expresiones asintóticas utilizadas en la demostración del lema 2.3.3.

Proposición B.0.1. *Sea $d - 1 \leq s < d$, con $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Para cada $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definimos*

$$R_N := 1 + N^{-1/d}, \quad \alpha_N := \frac{4R_N}{(R_N + 1)^2}.$$

Entonces, se verifica que

$$(B.0.1) \quad (R_N + 1)^{-s} = 2^{-s} \left(1 - \frac{s}{2} N^{-1/d} + o(N^{-1/d}) \right), \quad N \rightarrow \infty.$$

$$(B.0.2) \quad 1 - \alpha_N = \frac{1}{4N^{2/d}} \cdot (1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

Demostración. Probemos que se verifican las dos expresiones del enunciado:

i) *Justificación de (B.0.1).* Llamemos $x = N^{-1/d}$. Tenemos entonces que

$$(R_N + 1)^{-s} = (x + 2)^{-s} =: f(x).$$

Dado que, en el caso general en que $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $f(z) = (z+2)^{-s} = e^{-s \operatorname{Log}(z+2)}$ es una función analítica en $\mathbb{D}(0, 2)$, donde $\operatorname{Log}(z)$ es la rama principal del logaritmo y $\mathbb{D}(0, 2)$ es el disco abierto de centro 0 y radio 2, podemos considerar el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x)$ en torno a $x_0 = 0$, dado por

$$f(x) = (x + 2)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Calculemos entonces las derivadas de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= (x + 2)^{-s}, \\ f^{(1)}(x) &= -s(x + 2)^{-s-1}, \\ f^{(2)}(x) &= -s(-s-1)(x + 2)^{-s-2}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= -s(-s-1) \cdots (-s-k+1)(x + 2)^{-s-k} \end{aligned}$$

$$= \left(\prod_{\ell=1}^k (-s - \ell + 1) \right) (x + 2)^{-s-k}.$$

Evaluando estas derivadas en $x = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(0)}(0) &= 2^{-s}, \\ f^{(1)}(0) &= -s \cdot 2^{-s-1}, \\ f^{(2)}(0) &= -s(-s-1) \cdot 2^{-s-2}, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= \left(\prod_{\ell=1}^k (-s - \ell + 1) \right) \cdot 2^{-s-k}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión de la serie, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{-s} - s2^{-s-1}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\prod_{\ell=1}^k (-s - \ell + 1) \right) \cdot 2^{-s-k}}{k!} x^k \\ &= 2^{-s} \left(1 - \frac{s}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\prod_{\ell=1}^k (-s - \ell + 1) \right) \cdot 2^{-k}}{k!} x^k \right) \\ &= 2^{-s} \left(1 - \frac{s}{2}x + o(x) \right), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dado que $x = N^{-1/d}$, concluimos que

$$(R_N + 1)^{-s} = 2^{-s} \left(1 - \frac{s}{2}N^{-1/d} + o\left(N^{-1/d}\right) \right), \quad N \rightarrow \infty,$$

como buscábamos.

II) *Justificación de (B.0.2)*. Al igual que en el caso anterior, llamemos $x = N^{-1/d}$. Tenemos que

$$1 - \alpha_N = 1 - \frac{4R_N}{(R_N + 1)^2} = \frac{R_N^2 - 2R_N + 1}{(R_N + 1)^2} = \frac{(R_N - 1)^2}{(R_N + 1)^2} = \frac{x^2}{(x + 2)^2} =: g(x).$$

De cara a obtener el desarrollo en serie de Taylor de $g(x)$ en torno a $x_0 = 0$, recordemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \text{si } |z| < 1.$$

Derivando en esta expresión, obtenemos que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k,$$

de donde

$$\frac{1}{(1+z/2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{-z}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{2^k} z^k.$$

Teniendo esto en cuenta, tenemos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{(1+x/2)^2} = \frac{x^2}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{2^k} x^k \\ &= \frac{x^2}{4} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{2^k} x^k \right) = \frac{x^2}{4} \cdot (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que $x = N^{-1/d}$, concluimos que

$$1 - \alpha_N = \frac{1}{4N^{2/d}} \cdot (1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty,$$

como queríamos probar.

□

Referencias

- AHLFORS, L. V. (1979), *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. New York: McGraw-Hill (vid. págs. 14, 29).
- APOLODORO (ca. s. I-II a. C./1985), *Biblioteca*. Biblioteca Clásica Gredos, 85. Editorial Gredos, S.A., págs. 85-87 (vid. pág. 2).
- BELTRÁN, C. (2009), *Estimates on the condition number of random rank-deficient matrices*. IMA Journal of Numerical Analysis, 31, n.º 1, págs. 25-39. DOI: [10.1093/imanum/drp035](https://doi.org/10.1093/imanum/drp035) (vid. pág. 49).
- BELTRÁN, C. (2020), *Sobre el problema número 7 de Smale*. La Gaceta de la RSME, 23, n.º 3, págs. 507-534 (vid. pág. 4).
- BELTRÁN, C. y PARDO, L. M. (2011), *Fast linear homotopy to find approximate zeros of polynomial systems*. Foundations of Computational Mathematics, 11, n.º 1, págs. 95-129. DOI: [10.1007/s10208-010-9078-9](https://doi.org/10.1007/s10208-010-9078-9) (vid. pág. 4).
- BLUM, L., CUCKER, F., SHUB, M. y SMALE, S. (1998), *Complexity and Real Computation*. Springer-Verlag New York (vid. págs. 4, 49).
- BORODACHOV, S. V., HARDIN, D. P. y SAFF, E. B. (2019), *Discrete Energy on Rectifiable Sets*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York. DOI: [10.1007/978-0-387-84808-2](https://doi.org/10.1007/978-0-387-84808-2) (vid. págs. 6, 10, 18-20, 24, 32, 35, 46).
- BRAUCHART, J. S., DRAGNEV, P. D. y SAFF, E. B. (2014), *Riesz external field problems on the hypersphere and optimal point separation*. Potential Analysis, 141, págs. 647-678. DOI: [10.1007/s11118-014-9387-8](https://doi.org/10.1007/s11118-014-9387-8) (vid. pág. 32).
- BÜRGISSER, P. y CUCKER, F. (2011), *On a problem posed by Steve Smale*. Annals of Mathematics (2), 174, n.º 3, págs. 1785-1836. DOI: [10.4007/annals.2011.174.3.8](https://doi.org/10.4007/annals.2011.174.3.8) (vid. pág. 4).
- CONWAY, J. H. y SLOANE, N. J. A. (1999), *Sphere packings, lattices and groups*. 3.ª ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 290. Springer-Verlag New York. DOI: [10.1007/978-1-4757-6568-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6568-7) (vid. pág. 5).
- DAHLBERG, B. E. J. (1978), *On the distribution of Fekete points*. Duke Mathematical Journal, 45, n.º 3, págs. 537-542 (vid. pág. 32).
- DRAGNEV, P. D. (2002), *On the separation of logarithmic points on the sphere*. Approximation Theory X: Abstract and Classical Analysis, págs. 137-144 (vid. págs. 6, 28).
- DRAGNEV, P. D. y SAFF, E. B. (2007), *Riesz spherical potentials with external fields and minimal energy points separation*. Potential Analysis, 26, págs. 139-162. DOI: [10.1007/s11118-006-9032-2](https://doi.org/10.1007/s11118-006-9032-2) (vid. pág. 32).
- DUBICKAS, A. (1996), *On the maximal product of distances between points on a sphere*. Lithuanian Mathematical Journal, 36, n.º 3, págs. 241-248 (vid. pág. 28).
- FEDERER, H. (1969), *Geometric Measure Theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York (vid. pág. 49).
- GRADSHTEYN, I. S. y RYZHIK, I. M. (2007), *Table of integrals, series and products*. Ed. por A. JEFFREY y D. ZWILLINGER. Traducido del ruso por Scripta Technica, Inc. Elsevier Academic Press (vid. pág. 42).
- KESSELER, R. y HARLEY, M. (2011), *Polen: La sexualidad oculta de las flores*. Turner (vid. pág. 3).
- KUIJLAARS, A. B. J. y SAFF, E. B. (1998), *Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere*. Transactions of the American Mathematical Society, 350, n.º 2, págs. 523-538. DOI: [10.1090/S0002-9947-98-02119-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-98-02119-9) (vid. pág. 5).
- KUIJLAARS, A. B. J., SAFF, E. B. y SUN, X. (2007), *On separation of minimal Riesz energy points on spheres in Euclidean spaces*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 199, n.º 1, págs. 172-180. DOI: [10.1016/j.cam.2005.04.074](https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.074) (vid. pág. 32).
- LAINZ, M. (2017), *La fórmula de la coárea*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Cantabria. Disponible en <http://hdl.handle.net/10902/12592> (vid. pág. 49).

- LAIREZ, P. (2017), *A deterministic algorithm to compute approximate roots of polynomial systems in polynomial average time*. Foundations of Computational Mathematics, 17, n.º 5, págs. 1265-1292. DOI: [10.1007/s10208-016-9319-7](https://doi.org/10.1007/s10208-016-9319-7) (vid. pág. 4).
- LANDKOF, N. S. (1972), *Foundations of modern potential theory*. Traducido del ruso por A. P. Doohovskoy. Springer-Verlag (vid. págs. 36, 37, 43, 44).
- OVIDIO, P. (8 d. C./2008), *Metamorfosis. Libros I-V*. Biblioteca Clásica Gredos, 365. Editorial Gredos, S.A., págs. 259-270 (vid. pág. 1).
- RAKHMANOV, E. A., SAFF, E. B. y ZHOU, Y. M. (1995), *Electrons on the sphere*. En: Computational Methods and Function Theory 1994. Ed. por R. M. ALI, S. RUSCHEWEYH y E. B. SAFF. Vol. 5. Series in Approximation and Decompositions. World Scientific Publishing, págs. 293-309. DOI: [10.1142/9789814533232_0022](https://doi.org/10.1142/9789814533232_0022) (vid. págs. 28, 30).
- RIESZ, M. (1938), *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*. Acta Sci. Math. (Szeged), 9, págs. 1-42 (vid. pág. 36).
- RUDIN, W. (1987), *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Inc. (vid. pág. 7).
- SHUB, M. y SMALE, S. (1993), *Complexity of Bezout's Theorem: III. Condition Number and Packing*. Journal of Complexity, 9, págs. 4-14. DOI: [10.1006/jcom.1993.1002](https://doi.org/10.1006/jcom.1993.1002) (vid. pág. 4).
- SMALE, S. (1998), *Mathematical Problems for the Next Century*. The Mathematical Intelligencer, 20, n.º 2, págs. 7-15. DOI: [10.1007/bf03025291](https://doi.org/10.1007/bf03025291) (vid. pág. 4).
- STEIN, E. M. y SHAKARCHI, R. (2005), *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert spaces*. Princeton Lectures in Analysis, 3. Princeton University Press (vid. pág. 10).
- TAMMES, P. M. L. (1930), *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains*. Recueil des travaux botaniques néerlandais, 27, n.º 1, págs. 1-84 (vid. pág. 3).
- TEMME, N. M. (1996), *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons, Inc. (vid. págs. 11, 13).
- THOMSON, J. J. (1904), XXIV. *On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure*. Philosophical Magazine Series 6, 7, n.º 39, págs. 237-265. DOI: [10.1080/14786440409463107](https://doi.org/10.1080/14786440409463107) (vid. pág. 3).
- WHYTE, L. L. (1952), *Unique arrangements of points on a sphere*. The American Mathematical Monthly, 59, n.º 9, págs. 606-611. DOI: [10.2307/2306764](https://doi.org/10.2307/2306764) (vid. pág. 3).

